



SSC - CGL

संयुक्त स्नातक स्तर

कर्मचारी चयन आयोग

भाग - 2

गणित

SSC - CGL

S.N.	Content	P.N.
	गणित	
1.	संख्या पद्धति	1
2.	सरलीकरण	9
3.	लघुत्तम समापवर्त्य एवं महत्तम समापवर्तक	13
4.	करणी व घातांक	16
5.	प्रतिशत्ता	20
6.	लाभ-हानि	24
7.	बट्टा	29
8.	अनुपात तथा समानुपात	32
9.	साझेदारी	36
10.	मिश्रण एवं एलीगेशन	39
11.	औसत	41
12.	समय और कार्य	45
13.	पाइप और टंकी	48
14.	चाल, समय और दूरी	51
15.	नाव और धारा	55
16.	साधारण ब्याज	57
17.	चक्रवृद्धि ब्याज	61
18.	बीजगणित	64
19.	ज्यामिति	69

20.	क्षेत्रमिति	87
21.	त्रिकोणमिती	103
22.	ऊंचाई और दूरी	110
23.	निर्देशांक ज्यामिति	114
24.	सांख्यिकी (केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप)	119
25.	प्रायिकता	125
26.	डाटा इंटरप्रिटेशन	132

प्रिय विद्यार्थी, टॉपर्सनोट्स चुनने के लिए धन्यवाद।

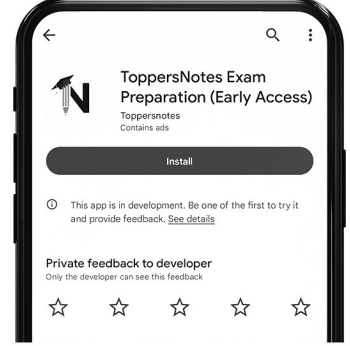
नोट्स में दिए गए QR कोड्स को स्कैन करने लिए टॉपर्स नोट्स ऐप डाउनलोड करें।
ऐप डाउनलोड करने के लिए दिशा निर्देश देखें :-



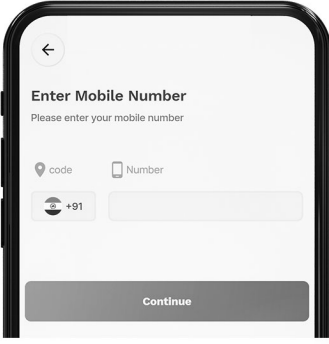
ऐप इनस्टॉल करने के लिए आप अपने मोबाइल फ़ोन के कैमरा से या गूगल लेंस से QR स्कैन करें।



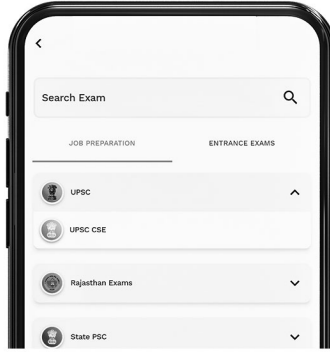
टॉपर्सनोट्स
एग्जाम प्रिपरेशन ऐप



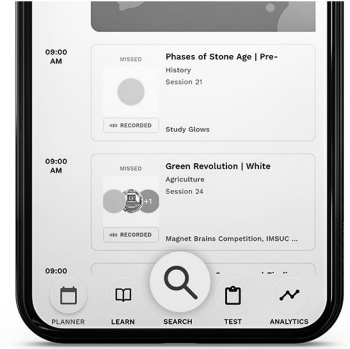
टॉपर्सनोट्स ऐप डाउनलोड करें गूगल प्ले स्टोर से।



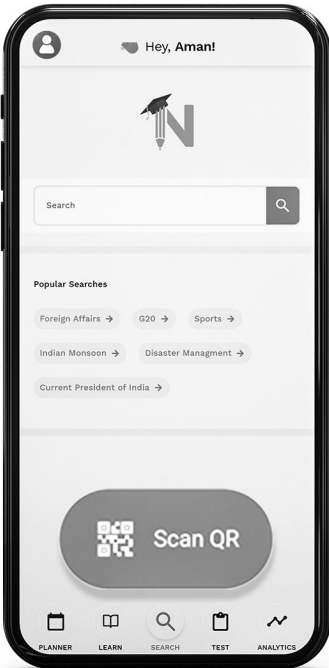
लॉग इन करने के लिए अपना मोबाइल नंबर दर्ज करें।



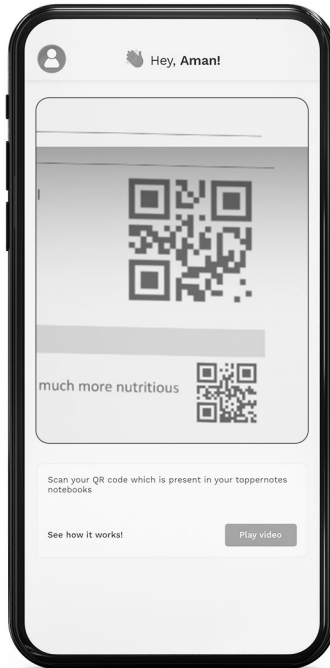
अपनी परीक्षा श्रेणी चुनें।



सर्च बटन पर क्लिक करें।



SCAN QR पर क्लिक करें।



किताब के QR कोड को स्कैन करें।



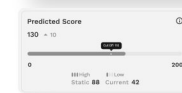
• सोल्युशन वीडियो
• डाउट वीडियो
• कॉन्सेप्ट वीडियो



• अतिरिक्त पाठ्य-सामग्री



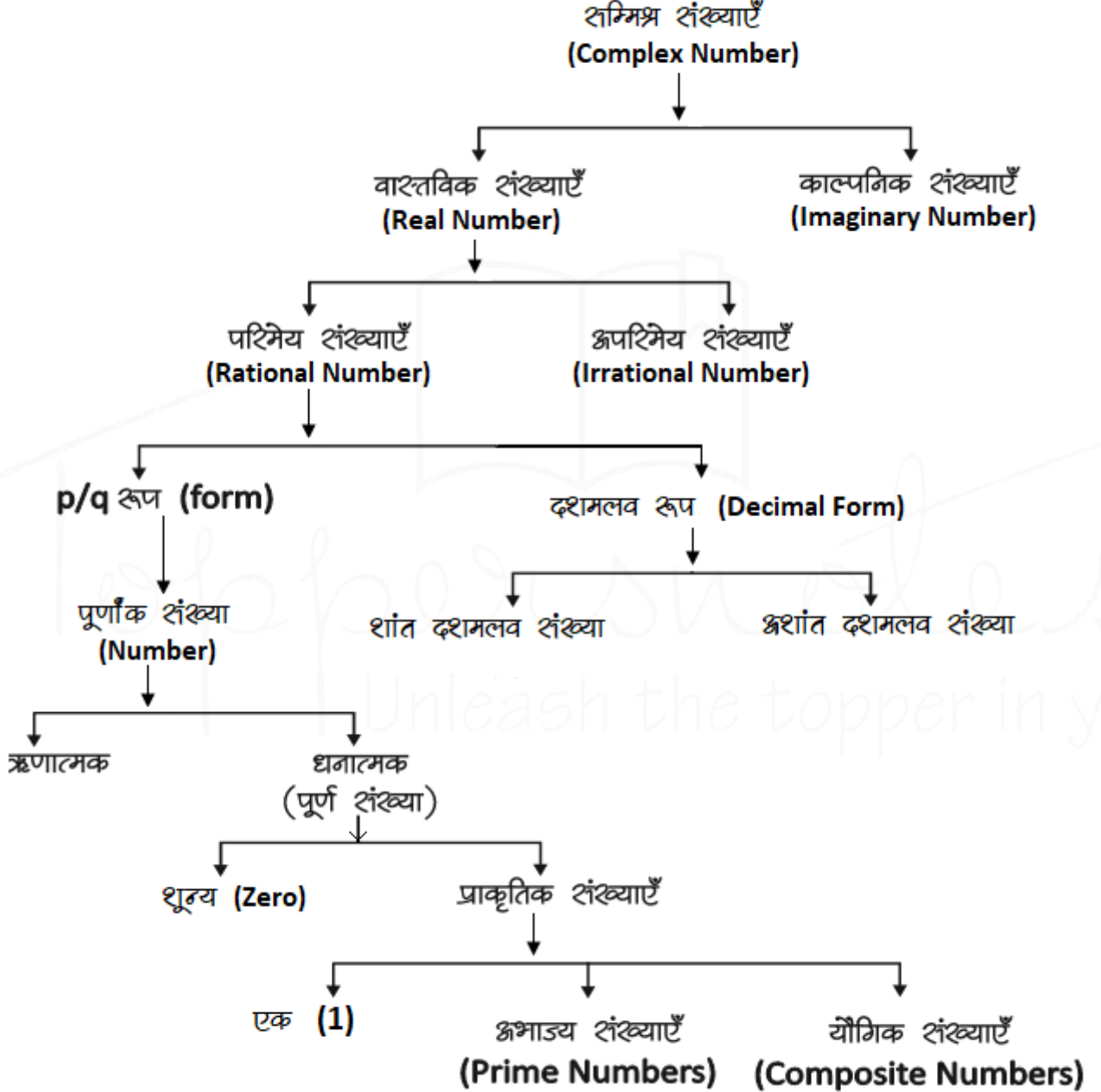
• विषयवार अभ्यास
• कमजोर टॉपिक विश्लेषण



• रैंक प्रेडिक्टर
• टेस्ट प्रैक्टिस

किसी भी तकनीकी सहायता के लिए
hello@toppersnotes.com पर मेल करें
या [766 56 41 122](tel:7665641122) पर whatsapp करें।

संख्या पद्धति (Number System)



संमिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

$Z = \text{वास्तविक संख्या} + \text{काल्पनिक संख्या}$

$$Z = a + ib$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या
b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को संमिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ

ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे 1 से सूचित करते हैं।
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।

पूर्ण संख्याएँ : $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।

$W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

श्म संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो श्म संख्या कहलाती हैं।

n वां पद = $2n$
 प्रथम n श्म संख्याओं का योग = $n(n+1)$
 प्रथम n श्म संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2
 $\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के

$$\text{वर्गों का योग} = \left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण - $11^2 = 121$
 $12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) - जिसके सिर्फ

दो form हो- $1 \times$ संख्या

जैसे - $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र श्म Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्याएँ - वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण - $(4, 9), (15, 22), (39, 40)$

HCF = 1

Perfect Number (परफेक्ट संख्या) - वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण $-6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$ यहाँ $1+2+3 \rightarrow 6$

$28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1+2+4+7+14 \rightarrow 28$

परिमेय (Rational) संख्याएँ - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण - $2/3, 4/5, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण - $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26} \dots$

पूर्णवर्ग संख्या



Unit Digit जो वर्ग के हो सकते हैं

जो नहीं हो सकते

- | | | |
|-----------|---|-------|
| • 0 | 2 | _____ |
| • 1 | 3 | _____ |
| • 4 | 7 | _____ |
| • 5 or 25 | 8 | _____ |
| • 6 | | |
| • 9 | | |
- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

नोट - शत: सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

Decimal संख्या को **Binary** में बदलना किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण -

89	$2 \times 44 = 88 ; 89 - 88 = 1$
44	$2 \times 22 = 44 ; 44 - 44 = 0$
22	$2 \times 11 = 22 ; 22 - 22 = 0$
11	$2 \times 5 = 10 ; 11 - 10 = 1$
5	$2 \times 2 = 4 ; 5 - 4 = 1$
2	$2 \times 1 = 2 ; 2 - 2 = 0$
1	अंतिम भागफल

शत: 89 के समतुल्य Binary number = $(1011001)_2$

1. Binary को Decimal में बदलना

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाईं ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दोगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण -

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Now

$$(1011001)_2 = 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$$

$$= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89$$

भाजकों की संख्या या गुणनखंड की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर घातो का गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण - 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल - $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या = $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)$

$$= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$$

इकाई का अंक ज्ञात करना

- जब संख्या घात (power) के रूप में हो जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।
जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः कर जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।
- सरलीकरण के रूप में हो प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

- यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो n विषम होने पर $(a+b)$ इसका भाजक होगा।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो ।

n विषम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$

n सम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$ या $(a+b)$ या दोनों ।

1. $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा ।
2. $a^n \div (a+1)$
 - यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा
 - यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा
3. $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा
4. $(a^n + a) \div (a+1)$
 - यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा ।
 - यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा ।

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे - 0.25, 0.15, 0.375 इतने भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

अशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते हैं ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183.....

- जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक । इतने भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non Repeating Decimal जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

पुनरावृत्ति Repeating वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे - $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, $\frac{22}{7} = 3.14285714\dots$ ऐसी भिन्नो को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं ।

इतने बार बोलते हैं ।

$$0.333\dots = 0.\bar{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714\dots = 3.14\overline{2857}$$

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.\bar{p} = \frac{p}{9} \quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.p\bar{q} = \frac{pq-p}{90} \quad 0.pq\bar{r} = \frac{pqr-pq}{900}$$

$$0.p\overline{qrs} = \frac{pqr-p}{990} \quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs-pq}{9900}$$

उदाहरण - (i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

रोमन पद्धति के संकेतक

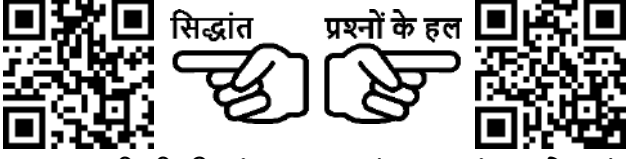
1	→	I
2	→	II
3	→	III
4	→	IV
5	→	V
6	→	VI
7	→	VII
8	→	VIII
9	→	IX
10	→	X
20	→	XX
30	→	XXX
40	→	XL
50	→	L
100	→	C
500	→	D
1000	→	M

विभाजकता के नियम

2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे - 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या में अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे - 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे - 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे - 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे - 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अन्तिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी। जैसे - 222222, 444444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अन्तिम तीन अंक '000' (शून्य) हो। जैसे - 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभाज्य होगी।
10 से	अन्तिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे - 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अन्तिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोड़ने पर संख्या अगर 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 17784

अभ्यास प्रश्न

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर
आधारित



उदा.1 यदि किसी संख्या का $\frac{3}{4}$ उस संख्या के $\frac{1}{6}$ से 7 अधिक है, तो उस संख्या $\frac{5}{3}$ क्या होगा ?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$

(c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी ने किसी संख्या का $\frac{5}{16}$ ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का $\frac{5}{6}$ ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये ।

(a) 300 (b) 480

(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

राम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर
आधारित



उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

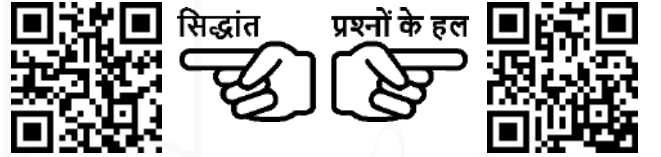
(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित



उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते हैं तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224

(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2 $(3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$ विभाजित है ।

(a) 11 (b) 16

(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

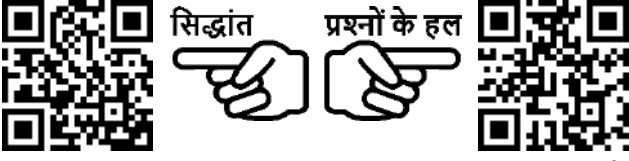
उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706 (b) 2796

(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)

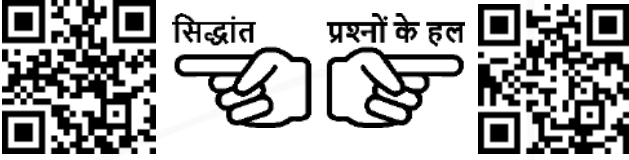
इकाई शंक निकालना आधारित



उदा.1 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई शंक ज्ञात कीजिए ?

उदा.2 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई शंक कितना है ?
 (a) 0 (b) 2
 (c) 3 (d) 5

प्राकृतिक संख्याओं के square एवं cube तथा उनके योग एवं श्रंत आधारित



उदा.1 $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) = ?$

(a) 385 (b) 2485
 (c) 2870 (d) 3255

उदा.2 $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = ?$

दशमलव संख्या आधारित



उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left(\sqrt[3]{27} - \sqrt[3]{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

उत्तर $\frac{19}{10}$ था। उत्तर के उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2 $\frac{0.936 - 0.568}{0.45 + 2.67}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

शून्य की संख्या पर आधारित



उदा.1 $(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \dots \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100})$ के गुणनफल में शून्य (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300
 (c) 1500 (d) 1600

उदा.2 $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के श्रंत में कितने 0 होंगे ?

सबसे बड़ी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आधारित



उदा.1 निम्न में से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$
 (c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या है।

$(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$
 (a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1
 (c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

आरोही/अवरोही क्रम आधारित



उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढ़ते क्रम में लिखने पर -
 (a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$
 (c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ -

$$\sqrt{7} - \sqrt{5}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{9} - \sqrt{7}, \sqrt{11} - \sqrt{9}$$

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$ को आरोही क्रम में लिखिये ?

गुणखंडों की संख्या पर आधारित



प्रश्नों के हल



उदा.1 $\{(127)^{127} + (97)^{127}\}$ तथा $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$

का अग्रिम गुणखण्ड क्या होगा ?

(a) 127

(b) 97

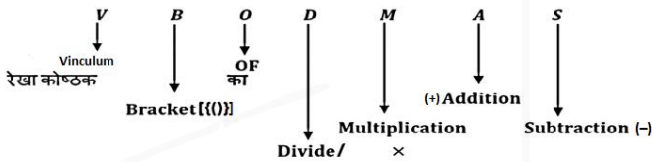
(c) 30

(d) 224

उदा.2 $\frac{(18)^{15} \times (75)^{16} \times (42)^{14}}{(35)^{12} \times (12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड हैं ?

शरलीकरण (Simplification)

- शरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये अंकडों को शरल रूप में प्रदर्शित करते हैं जैसे कि अंकडे भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते हैं।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोष्ठक) है। यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसके बाद (BODMAS) Rule कार्य करेंगे।
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते हैं-
 - छोटा कोष्ठक ()
 - मंझला कोष्ठक { }
 - बड़ा कोष्ठक []
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बड़ा कोष्ठक हल किया जाता है।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब "गुणा" से या "का" से होता है।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते हैं यदि दिया है तो।
- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे।

- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोडा) से संबंधित है। Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है।

प्रश्न -

शरल कीजिए।

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

हल:

Step 1 - सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नो को साधारण भिन्नो में बदलते हैं।

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 -

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{3-2}{12} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

Step 3 -

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{5}{2} - \frac{1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 4 -

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \left(\frac{30-1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 5 -

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{29}{12} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 6 - } \left[\frac{13}{4} \div \left\{ \frac{30-29}{24} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 7 - } \left[\frac{13}{4} \div \frac{1}{24} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 8 - } \left[\frac{13}{4} \times 24 \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 9 - } 13 \times 6 \times \frac{6}{13}$$

$$= 36 \text{ Ans.}$$

बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
5. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
6. $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2]$
8. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
10. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$
 $= \frac{1}{2}(a+b+c)\{(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\}$
 यदि $a + b + c = 0$ हो तो
 $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$
11. $a^3 + \frac{1}{a^3} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^3 - 3\left(a + \frac{1}{a}\right)$
12. $a^3 - \frac{1}{a^3} = \left(a - \frac{1}{a}\right)^3 + 3\left(a - \frac{1}{a}\right)$

समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है।

जैसे - 2, 5, 8, 11,

समान्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = a + (n - 1)d$$

जहाँ a = प्रथम पद

d = शार्व अंतर (द्वितीय पद - प्रथम पद)

n = पदों की संख्या

समान्तर श्रेणी के n पदों का योग $S_n = \frac{n}{2}[2a + (n - 1)d]$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो $S_n = \frac{n}{2}[a + l]$

जहाँ l = अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समांतर माध्य $A = \frac{a+b}{2}$ [a, b का समांतर माध्य A है।]

गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उसके पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है। इस निश्चित राशि को शार्व अनुपात कहते हैं।

गुणोत्तर श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = a \cdot r^{n-1}$$

जहाँ a = प्रथम पद

r = शार्व अनुपात

n = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के n पदों का योगफल

$$S_n = a \left(\frac{1-r^n}{1-r} \right); \text{ जब } r < 1 \quad S_n = a \left(\frac{r^n - 1}{r - 1} \right); \text{ जब } r > 1$$

1. दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य $G = \sqrt{ab}$
2. यदि दो घनात्मक राशियों a व b के मध्य समांतर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य A व G हैं तो

$$A > G, \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

हरात्मक श्रेणी

किसी श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम उन्नी क्रम में लिखने पर समांतर श्रेणी में हो तो उसे हरात्मक श्रेणी कहते हैं।

हरात्मक श्रेणी का n वाँ पद

$$T_n = \frac{1}{a + (n - 1)d}$$

$$\text{हरात्मक माध्य (H)} = \frac{2ab}{a+b}$$

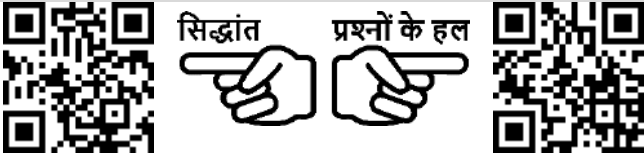
समान्तर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध

माना A, G तथा H दो राशियों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य हैं तब

$$\boxed{G^2 = AH} \quad \text{तथा} \quad \boxed{A > G > H}$$

अभ्यास प्रश्न

VBODMAS – आधारित



उदा.1 $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6 \text{ of } 2 \div (15 \div 8 \times 4)$
of $(28 \div 7 \text{ of } 5)$ का मान होगा -

- (a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$
(c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

उदा.2 सरल करें

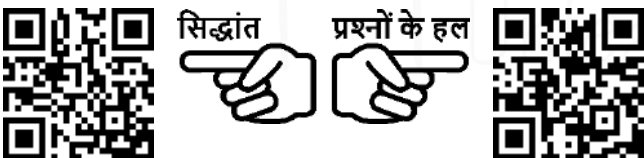
$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

उदा.3 सरल करें।

$$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

(a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$
(c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

वर्गान्तर तथा वर्गमूल आधारित



उदा.1 निम्नलिखित का मान है -

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

- (a) 3 (b) 9
(c) 7 (d) 5

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $(102)^2 = 10404$ है, तो

$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$
का मान किसके बराबर है ?

- (a) 0.306 (b) 0.0306
(c) 11.122 (d) 11.322

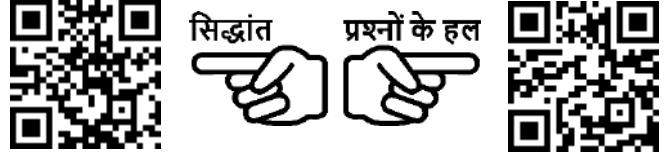
उत्तर (d)

उदा.3 $33 - 4\sqrt{35}$ का वर्गमूल क्या है ?

- (a) $\pm(2\sqrt{7} + \sqrt{5})$ (b) $\pm(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})$
(c) $\pm(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})$ (d) $\pm(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$

उत्तर (d)

घनान्तर तथा घनमूल आधारित



उदा.1 $(\sqrt{4^3 + 15^2})^3$ का मान क्या है ?

- (a) 4913 (b) 4313
(c) 4193 (d) 3943

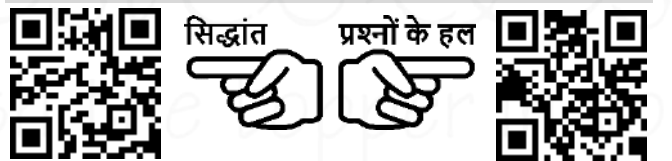
उत्तर (a)

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

- (a) 29 (b) 19
(c) 11 (d) 21

उत्तर (b)

भिन्न आधारित



उदा.1 निम्नलिखित का मान है -

$$4 - \frac{5}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} \text{ is}$$

- (a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{64}$
(c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{32}$

उत्तर (a)

उदा.2 यदि $2 = x + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$ है तो x का मान ज्ञात करें।

उत्तर (d)

- (a) $\frac{18}{17}$ (b) $\frac{21}{17}$
 (c) $\frac{13}{17}$ (d) $\frac{12}{17}$

उत्तर (b)

उदा.3 $999 \frac{998}{999} \times 999$ किसके बराबर है ?

- (a) 998999 (b) 999899
 (c) 989999 (d) 999989

उत्तर (a)

उदा.4 $\frac{1}{5} + 999 \frac{494}{495} \times 99$ का मान ज्ञात करें ।

- (a) 90000 (b) 99000
 (c) 90900 (d) 99990

उत्तर (b)

बीजगणितीय श्रृंखलों पर आधारित



उदा.1 $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$ के बराबर है ?

- (a) $2\frac{1}{2}$ (b) $3\frac{1}{2}$
 (c) $4\frac{1}{2}$ (d) $5\frac{1}{2}$

उत्तर (c)

उदा.2 $\frac{0.51 \times 0.051 \times 0.051 + 0.041 \times 0.041 \times 0.041}{0.51 \times 0.051 - 0.051 \times 0.041 + 0.041 \times 0.041}$ का मान क्या है ?

- (a) 0.92 (b) 0.092
 (c) 0.0092 (d) 0.00092

उत्तर (b)

श्रेणी आधारित (समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी)



उदा.1 50 से कम 3 के सभी गुणजों का योगफल ज्ञात करें ?

- (a) 400 (b) 408
 (c) 404 (d) 412

उत्तर (b)

उदा.2 निम्नलिखित समान्तर श्रेणी में कितने पद हैं ?
 7, 13, 19, , 205

उदा.3 5 के उन सभी घनात्मक गुणकों का योग ज्ञात करें जो 100 से कम हैं ?

समीकरण आधारित



उदा.1 एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रुपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है। उसका कुल खर्च रुपये 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

- (a) 17 days (b) 19 days
 (c) 21 days (d) 31 days

उत्तर (b)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

- (a) 40 (b) 44
 (c) 80 (d) 89

उत्तर (a)

उदा.3 जब एक दो श्रृंखलों की संख्या को उसके श्रृंखलों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है। जब उसके श्रृंखलों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को श्रृंखलों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है। संख्या के श्रृंखलों का योग कितना है ?

- (a) 7 (b) 9
 (c) 6 (d) 8

उत्तर (d)

लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक (LCM & HCF)

गुणनखण्ड

एक संख्या को दूसरे का गुणनखण्ड कहा जाता है, यदि यह दूसरे को पूरी तरह से विभाजित कर दे। इस प्रकार 3 व 4, 12 के गुणनखण्ड हैं।

समापवर्तक

वह संख्या जो दो या दो से अधिक दी हुयी संख्याओं को पूर्णतः विभाजित कर दे, उन संख्याओं का समापवर्तक कहलाती है। इस प्रकार 9, 18, 21 एवं 33 का एक समापवर्तक 3 है।

LCM (Lowest Common Multiple) (लघुत्तम समापवर्त्य)

- वह सबसे छोटी संख्या जो दी गयी संख्याओं से पूर्णतया विभाज्य हो, LCM कहलाती है।
- Power वाले संख्या का LCM निकालना - श्रभाज्य गुणनखण्ड करने के बाद Power के रूप में लिखेंगे और जितने श्रभाज्य संख्या का प्रयोग होगा उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर अधिकतम Power रखेंगे।

उदा.1 $(12)^{16}, (18)^{15}, (30)^{18}$ का LCM निकाले।

हल $(12)^{16} = (2 \times 2 \times 3)^{16} = (2^2 \times 3)^{16} = 2^{32} \times 3^{16}$
 $(18)^{15} = (2 \times 3 \times 3)^{15} = (2 \times 3^2)^{15} = 2^{15} \times 3^{30}$
 $(30)^{18} = (2 \times 3 \times 5)^{18} = 2^{18} \times 3^{18} \times 5^{18}$
 अतः $LCM = 2^{32} \times 3^{30} \times 5^{18}$ Ans.

भिन्नों का LCM निकालना

$$LCM = \frac{\text{अंशों का LCM}}{\text{हरों का HCF}}$$

उदा.2 $\frac{1}{2}$ व $\frac{5}{8}$ का LCM ?

$$LCM = \frac{1 \text{ व } 5 \text{ का LCM}}{2 \text{ व } 8 \text{ का HCF}} \Rightarrow \frac{5}{2}$$

HCF (Highest Common Factor)

महत्तम समापवर्तक

- वह सबसे बड़ी संख्या जिससे दी गयी सभी संख्याएँ पूर्णतः विभाजित हो, HCF कहलाता है।

- जैसे - 18 एवं 24 का म.स.प. 6 है।

उदा.1 HCF निकालना : दो संख्याओं का HCF भाग विधि द्वारा निकाला जाता है, तो भागफल क्रमशः 3, 4, एवं 5 प्राप्त होता है। यदि दो संख्याओं का HCF, 18 हो तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल दो संख्याएँ a एवं b हैं

$$a \sqrt{b} \ 3$$

$$c \sqrt{a} \ 4$$

$$d \sqrt{\frac{c}{x \times x}} \ 5$$

अंशित भाजक HCF होता है।

$$d = 18$$

$$c = 5 \times d = 5 \times 18 = 90$$

$$a = (4 \times c) + d$$

$$= (4 \times 90) + 18 = 378$$

$$b = 3a + c$$

$$= (3 \times 378) + 90 = 1134 + 90$$

$$= 1224, 378 \text{ Ans}$$

Power वाली संख्या का HCF निकालना

पहले Base का श्रभाज्य गुणनखण्ड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे और जो सभी में Common श्रभाज्य संख्या होगी, उसे गुणा के रूप में लिखेंगे और उस पर न्यूनतम Power रखेंगे।

उदा.1 $(24)^8, (36)^{12}, (18)^{16}$ का HCF निकालें।

हल $24 = (2^3 \times 3)^8 = 2^{24} \times 3^8$

$$36 = (2^2 \times 3^2)^{12} = 2^{24} \times 3^{24}$$

$$18 = (2 \times 3^2)^{16} = 2^{16} \times 3^{32}$$

अतः म.स.प. = $2^{16} \times 3^8$

भिन्न का HCF निकालना

$$\text{भिन्न का HCF} = \frac{\text{अंश का HCF}}{\text{हर का LCM}}$$

उदा.1 $\frac{18}{25}, \frac{12}{7}, \frac{6}{35}$

हल $\frac{18, 12, 6 \text{ का HCF}}{25, 7, 35 \text{ का LCM}} = \frac{6}{175}$

किसी दो संख्याओं का जोड़ तथा ल.स.प. का म.स.प., उन संख्याओं के म.स. के बराबर होता है।

माना दो संख्याएँ x तथा y हैं, तथा उनका म.स. H है।

अतः $x = Ha$

$y = Hb$

जहाँ a तथा b परस्पर अभाज्य हैं।

x, y का $LCM = Hab$

और $x + y = H(a + b)$

अब 'a' तथा 'b' परस्पर अभाज्य संख्याएँ हैं, तो $(a + b)$ तथा ab भी परस्पर अभाज्य होगी। इसीसे यह निष्कर्ष निकलता है कि $H(a + b)$ तथा Hab का म.स. H ही होगा, जो x तथा y का भी म.स. है।

LCM एवं HCF में Relation

$LCM \times HCF =$ दोनों संख्याओं का गुणनफल

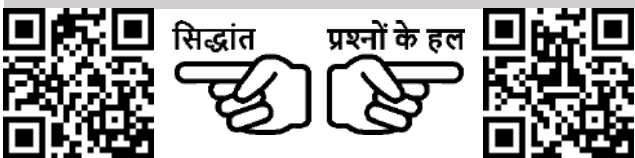
उदा.1 दो संख्याओं का LCM एवं HCF क्रमशः 420 एवं 28 हैं। यदि एक संख्या 84 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात कीजिए -

हल दूसरी संख्या = $\frac{420 \times 28}{84} = 140$

- जब कहा जाये कि x, y, z के लिये वह छोटी से छोटी संख्या क्या होगी जिसमें भाग देने पर r शेष बच जाये, इसके लिए उत्तर होगा x, y, z का $(LCM + r)$ ।
- वह छोटी से छोटी संख्या जिसे x, y, z से भाग करने पर शेषफल क्रमशः a, b, c हो। इसके लिये उत्तर होगा $(x, y, z) - K$ का LCM।

अभ्यास प्रश्न

महत्तम समापवर्तक आधारित



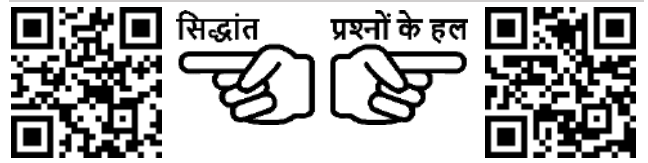
उदा.1 84, 126, 140 का महत्तम समापवर्तक कितना है ?

उदा.2 $x^6 - 1$ और $x^4 + 2x^3 - 2x^1 - 1$ का म.स. क्या होगा ?

- (a) $x^2 + 1$ (b) $x - 1$
 (c) $x^2 - 1$ (d) $x + d$

उत्तर (c)

लघुतम समापवर्त्य आधारित



उदा.1 15, 18, 24, 27, 36 का लघुतम समापवर्त्य क्या होगा ?

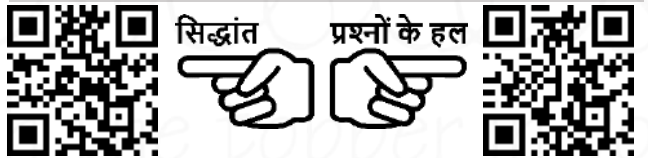
उदा.2 दो संख्याओं का योग 45 है। उनका अंतर योग का $\frac{1}{9}$ है, तो उनका ल.स. ज्ञात करें।
 (a) 200 (b) 250
 (c) 100 (d) 150

उत्तर (c)

उदा.3 छः घण्टियाँ एक साथ बजनी आरम्भ हुई, यदि ये घण्टियाँ क्रमशः 2, 4, 6, 8, 10, 12 सेकण्ड के अंतराल से बजे, तो 30 मिनट में कितनी बार ये एक साथ इकट्ठी बजेंगी ?

- (a) 4 बार (b) 10 बार
 (c) 16 बार (d) इनमें से कोई नहीं

भिन्नों के ल.स.प. तथा म.स.प.



उदा.1 $\frac{14}{33}, \frac{42}{55}, \frac{21}{22}$ का महत्तम समापवर्तक ज्ञात कीजिए -

उदा.2 $\frac{11}{14}, \frac{55}{42}, \frac{33}{35}, \frac{44}{63}$ का लघुतम समापवर्तक ज्ञात कीजिए -

उदा.3 तीन व्यक्ति एक 11 किमी. लम्बे वृत्ताकार पथ पर एक साथ एक ही दिशा में चलना प्रारंभ करते हैं। उनकी चाल क्रमशः 4, 5.5 एवं 8 किमी. प्रति घंटा है। वे तीनों एक साथ कितने समय बाद प्रारंभिक बिन्दु पर मिलेंगे ?

ल.श.प. तथा म.श.प. के मध्य संबंध आधारित



उदा.1 दो संख्याओं का ल.श. 225 तथा म.श. 5 है।
यदि उनमें से एक संख्या 25 है, तो दूसरी
संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 5 (b) 25
(c) 45 (d) 225

उत्तर (c)

उदा.2 दो संख्याओं का योग 36 है, इनका महत्तम
समापवर्तक 3 तथा लघुत्तम समापवर्त्य 105 है,
इन संख्याओं के व्युत्क्रमों का योग कितना होगा
?

- (a) $\frac{2}{35}$ (b) $\frac{3}{25}$
(c) $\frac{4}{35}$ (d) $\frac{2}{25}$

उत्तर (c)

उदा.3 दो संख्याओं के म.श. तथा ल.श. का योग 680
है उनका ल.श., म.श. का 84 गुणा है। यदि
एक संख्या 56 है, तो दूसरी संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 84 (b) 12
(c) 8 (d) 96

उत्तर (d)

उदा.4 दो संख्याओं के महत्तम समापवर्तक तथा लघुत्तम
समापवर्त्य क्रमशः 12 तथा 72 है, यदि इन
संख्याओं का योग 60 हो, तो इनमें से छोटी
संख्या निम्न में से कौन-सी है ?

- (a) 12 (b) 24
(c) 60 (d) 72

उत्तर (b)