



**RPF/RPSF**

**सब इंस्पेक्टर**

**RAILWAY PROTECTION FORCE**

**RAILWAY PROTECTION SPECIAL FORCE**

**भाग – 3**

**गणित**



# RPF - SI

## CONTENTS

### गणित

1.	संख्या पद्धति	1
2.	सरलीकरण	9
3.	करणी व घातांक	14
4.	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	18
5.	समय और कार्य	21
6.	चाल, समय और दूरी	24
7.	औसत	28
8.	अनुपात एवं समानुपात	32
9.	मिश्रण एवं एलीगेशन	37
10.	प्रतिशतता	40
11.	बट्टा	45
12.	लाभ – हानि	48
13.	साधारण ब्याज	53
14.	चक्रवृद्धि ब्याज	57
15.	क्षेत्रमिति	61
16.	डाटा इंटरप्रिटेशन	77



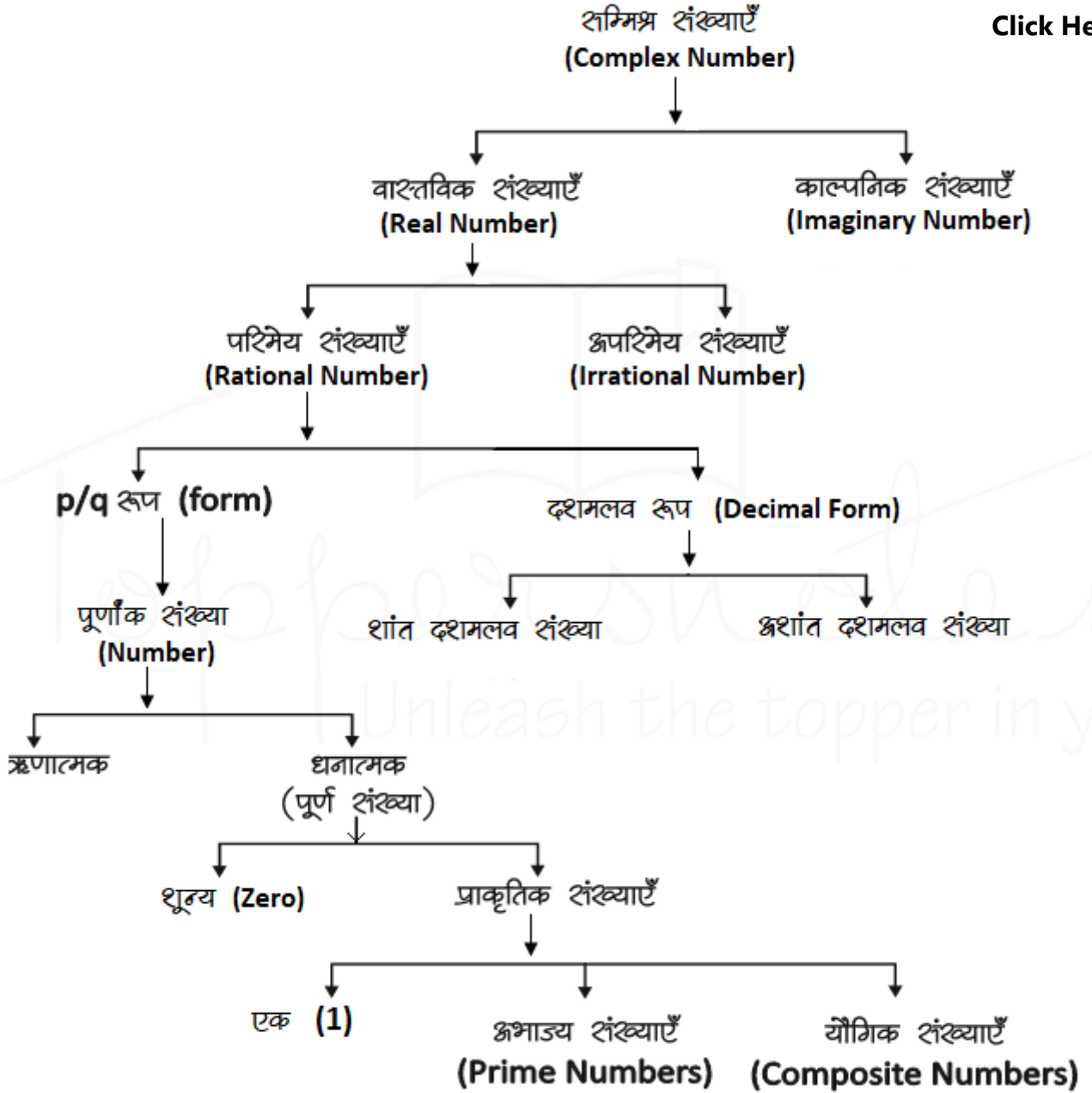
Click Here

इस QR Code को Scan कर इसमें दिए गये Video को देखकर जाने कि किताब में दिए गये QR Codes का उपयोग किस प्रकार करना है।

## संख्या पद्धति (Number System)



Click Here



**संमिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)**

$Z =$  वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$Z = a + ib$$

जहाँ  $a =$  वास्तविक संख्या  
 $b =$  काल्पनिक संख्या

**वास्तविक संख्याएँ**

परिमित एवं अपरिमित संख्याओं को संमिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

**काल्पनिक संख्याएँ :** जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

**पूर्णांक संख्याएँ :** संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे  $I$  से सूचित करते हैं।  
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

**प्राकृत संख्याएँ :** जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।  
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

**पूर्ण संख्याएँ :** जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।  
 $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

**सम संख्याएँ :** संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं।

$n$  वां पद =  $2n$   
 प्रथम  $n$  सम संख्याओं का योग =  $n(n+1)$   
 प्रथम  $n$  सम संख्याओं के वर्गों का योग =  $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2} \right\}$$

**विषम संख्याएँ :** वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।

प्रथम  $n$  विषम संख्याओं का योग =  $n^2$   
 $\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$

**प्राकृतिक संख्याएँ :** प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं का योग =  $\frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग  
 $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम  $n$  प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग =  $\left[ \frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण -  $11^2 = 121$   
 $12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$  Difference  $144 - 121 = 23$

**अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) -** जिसके

सिर्फ दो form हो-  $1 \times$  संख्या

जैसे -  $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

जहाँ 1 Prime Number नहीं है।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोड़ा है।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

**सह अभाज्य संख्याएँ -** वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो।

उदाहरण -  $(4, 9), (15, 22), (39, 40)$   
 HCF = 1

**Perfect Number (परफेक्ट संख्या) -** वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण -  $6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$  यहाँ  $1+2+3 \rightarrow 6$   
 $28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1+2+4+7+14 \rightarrow 28$

**परिमेय (Rational) संख्याएँ** - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए।

उदाहरण -  $2/3, 4/5, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

**अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ** - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता।

उदाहरण -  $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26} \dots$

पूर्णवर्ग संख्या



Unit Digit जो वर्ग के हो सकते हैं

- |           |         |
|-----------|---------|
| • 0       | 2 _____ |
| • 1       | 3 _____ |
| • 4       | 7 _____ |
| • 5 or 25 | 8 _____ |
| • 6       |         |
| • 9       |         |
- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

**नोट** - शत: सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए।

## Binary व Decimal में बदलना

**1. Decimal संख्या को Binary में बदलना**  
 किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण -

शत: 89 के समतुल्य Binary number =  $(1011001)_2$

**2. Binary को Decimal में बदलना**

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाईं ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का

दुगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है

89	$2 \times 44 = 88 ; 89 - 88 = 1$
44	$2 \times 22 = 44 ; 44 - 44 = 0$
22	$2 \times 11 = 22 ; 22 - 22 = 0$
11	$2 \times 5 = 10 ; 11 - 10 = 1$
5	$2 \times 2 = 4 ; 5 - 4 = 1$
2	$2 \times 1 = 2 ; 2 - 2 = 0$
1	अंतिम भागफल

अंशका मान 0 होता है।

उदाहरण -

1	0	1	1	0	0	1
$2^6$	$2^5$	$2^4$	$2^3$	$2^2$	$2^1$	$2^0$

Now

$$\begin{aligned}
 (1011001)_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} = 89
 \end{aligned}$$

## भाजकों की संख्या या गुणनसंख्या की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण - 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल -  $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

$$\begin{aligned}
 \text{भाजकों की संख्या} &= (3+1)(1+1)(1+1)(1+1) \\
 &= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32
 \end{aligned}$$

## इकाई का अंक ज्ञात करना

**1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो**  
 जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा।

जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power

रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः कर जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे।

## 2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा।

## Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि  $a^n + b^n$  दिया हो तो

$n$  विषम होने पर  $(a+b)$  इसका भाजक होगा।

2. यदि  $a^n - b^n$  दिया हो तो।

$n$  विषम होने पर भाजक  $\rightarrow (a-b)$

$n$  सम होने पर भाजक  $\rightarrow (a-b)$  या  $(a+b)$  या दोनों।

1.  $a^n \div (a-1)$  हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

2.  $a^n \div (a+1)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो हमेशा } 1 \text{ बचेगा} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल } a \text{ होगा} \end{array} \right.$

3.  $(a^n + a) \div (a-1)$  हो, तो शेषफल 2 बचेगा

4.  $(a^n + a) \div (a+1)$   $\left\{ \begin{array}{l} \text{यदि } n \text{ सम हो, तो शेषफल} \\ \text{शून्य (0) होगा।} \\ \text{यदि } n \text{ विषम हो, तो शेषफल} \\ (a-1) \text{ होगा।} \end{array} \right.$

## शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे - 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है।

## अशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते हैं।

0.3333, 0.7777, 0.183183183.....

○ जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक। इसे भिन्न में लिखा जा सकता है।

Non  
Repeating  
Decimal

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती।

## आवर्ती दशमलव भिन्न

पुनरावृत्ति  
Repeating

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है।

जैसे -  $\frac{1}{3} = 0.333\dots$ ,  $\frac{22}{7} = 3.14285714\dots$  ऐसी

भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं।

$$0.333\dots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714\dots = 3.\overline{142857}$$

इसे बार बोलते हैं।

• शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.\overline{p} = \frac{p}{9} \quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99} \quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

• मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.p\overline{q} = \frac{pq-p}{90} \quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr-pq}{900}$$

$$0.p\overline{q}r = \frac{pqr-p}{990} \quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs-pq}{9900}$$

उदाहरण - (i)  $0.3\overline{9} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii)  $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

$$(iii) 0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$$

### रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I
2	→	II
3	→	III
4	→	IV
5	→	V
6	→	VI
7	→	VII
8	→	VIII
9	→	IX
10	→	X
20	→	XX
30	→	XXX
40	→	XL
50	→	L
100	→	C
500	→	D
1000	→	M

### विभाजकता के नियम

2 से	अंतिम अंक 2 या 0 हो जैसे - 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या में अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे - 729, 12342, 5631
4 से	अंतिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे - 1024, 58764, 567800
5 से	अंतिम अंक शून्य या 5 हो जैसे - 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या क्रम 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे - 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अंतिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी। जैसे - 222222, 44444444444, 7854

8 से	यदि किसी संख्या के अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो। जैसे - 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग क्रम 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभाज्य होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अंतर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे - 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अंतिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोड़ने पर संख्या क्रम 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 17784

**हल सहित उदाहरण**  
**संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर**  
**आधारित**

Click Here



उदा.1 यदि किसी संख्या का  $\frac{3}{4}$  उस संख्या के  $\frac{1}{6}$  से 7 अधिक है, तो उस संख्या  $\frac{5}{3}$  क्या होगा ?

(a) 12 (b) 18

(c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल  $a$  तथा  $b$ , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

(a)  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  (b)  $\frac{b}{a}$

(c)  $\frac{a}{b}$  (d)  $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c) 1"

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

(a) 1350 (b) 1250

(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

उदा.4 एक विद्यार्थी से किसी संख्या का  $\frac{5}{16}$  ज्ञात करने के लिये कहा गया और गलती से उस संख्या का  $\frac{5}{6}$  ज्ञात कर लिया अर्थात् उसका उत्तर सही उत्तर से 250 अधिक था तो दी हुई संख्या ज्ञात कीजिये ।

(a) 300 (b) 480

(c) 450 (d) 500

उत्तर (b)

**राम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर**  
**आधारित**

Click Here



उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48

(c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

**भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित**

Click Here



उदा.1 64329 को जब किसी संख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते हैं तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224

(c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

उदा.2  $(3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28})$  विभाजित है ।

(a) 11 (b) 16

(c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

उदा.3 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706 (b) 2796

(c) 2736 (d) 2826

उत्तर (c)



### इकाई शंक निकालना आघारित



उदा.1  $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$  के परिणाम का इकाई शंक ज्ञात कीजिए ?

उदा.2  $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$  में इकाई शंक कितना है ?

- (a) 0                                  (b) 2  
(c) 3                                  (d) 5

### प्राकृतिक संख्याओं के square एवं cube तथा उनके योग एवं अंतर आघारित



उदा.1  $(11^2 + 12^2 + 13^2 + \dots + 20^2) = ?$

- (a) 385                                  (b) 2485  
(c) 2870                                (d) 3255

उदा.2  $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = ?$

### दशमलव संख्या आघारित



उदा.1 एक विद्यार्थी को निम्नलिखित व्यंजक को सरल करने को कहा गया

$$\frac{0.0016 \times 0.025}{0.325 \times 0.05} \div \frac{0.1216 \times 0.105 \times 0.002}{0.08512 \times 0.625 \times 0.039} + \left( \sqrt[3]{27} - \sqrt{6\frac{3}{4}} \right)^2$$

उत्तर  $\frac{19}{10}$  था। उत्तर में कितने प्रतिशत त्रुटि थी ?

उदा.2  $\frac{0.936 - 0.568}{0.45 + 2.67}$  को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

### शून्य की संख्या पर आघारित



उदा.1  $(1^1 \times 2^2 \times 3^3 \times 4^4 \times \dots \times 98^{98} \times 99^{99} \times 100^{100})$  के गुणनफल में शून्यों की संख्या ज्ञात करें ?

- (a) 1200                                (b) 1300  
(c) 1500                                (d) 1600

उदा.2  $1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 250$  को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

### शबदे बड़ी तथा शबदे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आघारित



उदा.1 निम्न में से  $\frac{2}{5}$  और  $\frac{4}{9}$  के बीच उपस्थित भिन्न हैं ?

- (a)  $\frac{3}{7}$                                       (b)  $\frac{2}{3}$   
(c)  $\frac{4}{5}$                                       (d)  $\frac{1}{2}$

उदा.2 निम्न में से बड़ी संख्या है।

- (3) <sup>$\frac{1}{3}$</sup> , (2) <sup>$\frac{1}{2}$</sup> , 1, (6) <sup>$\frac{1}{6}$</sup>   
(a) (2) <sup>$\frac{1}{2}$</sup>                                       (b) 1  
(c) (6) <sup>$\frac{1}{6}$</sup>                                       (d) (3) <sup>$\frac{1}{3}$</sup>

### आरोही/अवरोही क्रम आघारित



उदा.1  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$  को बढ़ते क्रम में लिखने पर -

- (a)  $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$                               (b)  $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$   
(c)  $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$                               (d)  $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में रजार्ँ -

$$\sqrt{7} - \sqrt{5}, \sqrt{5} - \sqrt{3}, \sqrt{9} - \sqrt{7}, \sqrt{11} - \sqrt{9}$$

उदा.3 संख्याओं  $\frac{7}{9}, \frac{11}{13}, \frac{16}{19}, \frac{21}{25}$  को आरोही क्रम में लिखिये ?

### गुणनखंडों की संख्या पर आधारित



उदा.1  $\{(127)^{127} + (97)^{127}\}$  तथा  $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$

का अयनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

- (a) 127                      (b) 97  
(c) 30                        (d) 224

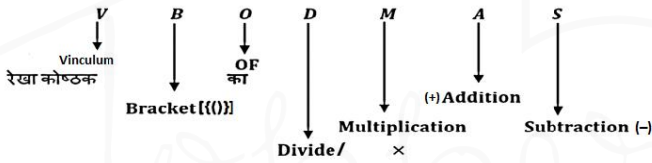
उदा.2  $\frac{(18)^{15} \times (75)^{16} \times (42)^{14}}{(35)^{12} \times (12)^{16}}$  में कितने अभाज्य खंड हैं ?

## शरलीकरण (Simplification)

Click Here



- शरलीकरण के श्रंतर्गत हम दिए गये श्रॉकडों को शरल रूप में प्रदर्शित करते हैं जैसे कि श्रॉकडे भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही श्राये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते हैं ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोष्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसके बाद BODMAS Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते हैं-
  - छोटा कोष्ठक ( )
  - मंझला कोष्ठक { }
  - बडा कोष्ठक [ ]
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बडा कोष्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब "गुणा" से या "का" से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते हैं यदि दिया है तो ।

- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे ।
- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोडा) से संबंधित है । Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है ।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है ।

प्रश्न. शरल कीजिए ।

$$\left[ 3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left( \frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

हल Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते हैं ।

$$\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left( \frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

अब VBODMAS के श्रुतुशार

Step 2 –

$$\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} - \frac{3-2}{12} \right) \right\} \right] \div \left( \frac{1}{2} \text{ of } \frac{13}{3} \right)$$

Step 3 –

$$\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \left( \frac{5}{2} - \frac{1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 4 –

$$\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \left( \frac{30-1}{12} \right) \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 5 –

$$\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{29}{12} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$$

Step 6 –  $\left[ \frac{13}{4} \div \left\{ \frac{30-29}{24} \right\} \right] \div \frac{13}{6}$

$$\text{Step 7} - \left[ \frac{13}{4} \div \frac{1}{24} \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 8} - \left[ \frac{13}{4} \times 24 \right] \div \frac{13}{6}$$

$$\text{Step 9} - 13 \times 6 \times \frac{6}{13}$$

$$= 36 \text{ Ans.}$$

### बीजगणितीय सूत्र

1.  $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2.  $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3.  $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4.  $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
5.  $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
6.  $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left( a + \frac{1}{a} \right)^2 - 2$
7.  $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2} \left[ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right]$
8.  $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9.  $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
10.  $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$ 

$$= \frac{1}{2}(a + b + c) \left\{ (a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2 \right\}$$

यदि  $a + b + c = 0$  हो तो

$$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$$

$$11. a^3 + \frac{1}{a^3} = \left( a + \frac{1}{a} \right)^3 - 3 \left( a + \frac{1}{a} \right)$$

$$12. a^3 - \frac{1}{a^3} = \left( a - \frac{1}{a} \right)^3 + 3 \left( a - \frac{1}{a} \right)$$

### समान्तर श्रेणी

वह श्रेणी जिसका प्रत्येक पद अपने पूर्व पद से कोई नियत राशि जोड़ने अथवा घटाने से प्राप्त होता है।

जैसे - 2, 5, 8, 11, .....

समान्तर श्रेणी का  $n$ वाँ पद

$$T_n = a + (n - 1)d$$

जहाँ  $a$  = प्रथम पद

$d$  = शर्वा श्रंत (द्वितीय पद - प्रथम पद)

$n$  = पदों की संख्या

समान्तर श्रेणी के  $n$  पदों का योग  $S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d]$

यदि प्रथम व अंतिम पद ज्ञात हो तो  $S_n = \frac{n}{2} [a + l]$

जहाँ  $l$  = अंतिम पद

दो राशियों के मध्य समान्तर माध्य  $A = \frac{a+b}{2}$  [ $a, b$  का

समान्तर माध्य  $A$  है।]

### गुणोत्तर श्रेणी

यदि श्रेणी के प्रत्येक पद का उसके पूर्व पद से अनुपात एक निश्चित राशि होती है तो गुणोत्तर श्रेणी होती है। इस निश्चित राशि को शर्वा अनुपात कहते हैं।

गुणोत्तर श्रेणी का  $n$  वाँ पद

$$T_n = a \cdot r^{n-1}$$

जहाँ  $a$  = प्रथम पद

$r$  = शर्वा अनुपात

$n$  = पदों की संख्या

गुणोत्तर श्रेणी के  $n$  पदों का योगफल

$$S_n = a \left( \frac{1-r^n}{1-r} \right); \text{ जब } r < 1 \quad S_n = a \left( \frac{r^n-1}{r-1} \right); \text{ जब } r > 1$$

1. दो राशियों के मध्य गुणोत्तर माध्य  $G = \sqrt{ab}$

2. यदि दो घनात्मक राशियों  $a$  व  $b$  के मध्य समान्तर माध्य तथा गुणोत्तर माध्य  $A$  व  $G$  हैं तो

$$A > G, \quad \frac{a+b}{2} > \sqrt{ab}$$

### हरात्मक श्रेणी

किसी श्रेणी के पदों के व्युत्क्रम अंश क्रम में लिखने पर समान्तर श्रेणी में हो तो उसे हरात्मक श्रेणी कहते हैं।

हरात्मक श्रेणी का  $n$  वाँ पद

$$T_n = \frac{1}{a + (n-1)d}$$

हरात्मक माध्य (H) =  $\frac{2ab}{a+b}$

समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य में संबंध माना A, G तथा H दो शिष्टों a व b के मध्य क्रमशः समांतर माध्य, गुणोत्तर माध्य व हरात्मक माध्य हैं तब

$$\boxed{G^2 = AH} \quad \text{तथा} \quad \boxed{A > G > H}$$

### अभ्यास प्रश्न

#### VBODMAS – आघारित

Click Here



उदा.1 The value of  $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$  of  $2 \div (15 \div 8 \times 4)$  of  $(28 \div 7$  of  $5)$  is –

- (a)  $4\frac{32}{75}$                       (b)  $4\frac{8}{75}$   
 (c)  $4\frac{2}{3}$                          (d)  $4\frac{1}{6}$

उदा.2 सरल करें

$$\left[ 3\frac{1}{4} \div \left\{ 1\frac{1}{4} - \frac{1}{2} \left( 2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} \right) \right\} \right] \div \left( \frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3} \right)$$

उदा.3 सरल करें ।

$$2\frac{3}{4} \div 1\frac{5}{6} \div \frac{7}{8} \times \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right) + \frac{5}{7} \div \frac{3}{4} \text{ of } \frac{3}{7}$$

- (a)  $\frac{56}{77}$                          (b)  $\frac{49}{80}$   
 (c)  $\frac{2}{3}$                          (d)  $3\frac{2}{9}$

#### वर्गान्तर तथा वर्गमूल आघारित

Click Here



उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$\sqrt{5 + \sqrt{11 + \sqrt{19 + \sqrt{29 + \sqrt{49}}}}} \text{ is}$$

- (a) 3                              (b) 9  
 (c) 7                              (d) 5

उत्तर (a)

उदा.2 यदि  $(102)^2 = 10404$  है, तो

$$\sqrt{104.04} + \sqrt{1.0404} + \sqrt{0.010404}$$

का मान किसके बराबर है ?

- (a) 0.306                      (b) 0.0306  
 (c) 11.122                    (d) 11.322

उत्तर (d)

उदा.3  $33 - 4\sqrt{35}$  का वर्गमूल क्या है ?

- (a)  $\pm(2\sqrt{7} + \sqrt{5})$       (b)  $\pm(\sqrt{7} + 2\sqrt{5})$   
 (c)  $\pm(\sqrt{7} - 2\sqrt{5})$       (d)  $\pm(2\sqrt{7} - \sqrt{5})$

उत्तर (d)

#### घनान्तर तथा घनमूल आघारित

Click Here



उदा.1  $(\sqrt{4^3 + 15^2})^3$  का मान क्या है ?

- (a) 4913                        (b) 4313  
 (c) 4193                        (d) 3943

उत्तर (a)

उदा.2 710 में कौनसी छोटी संख्या जोड़ी जानी चाहिए ताकि योग एक पूर्ण घन बन जाए ?

- (a) 29                            (b) 19  
 (c) 11                            (d) 21

उत्तर (b)

#### भिन्न आघारित

Click Here



उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$4 - \frac{5}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{2 + \frac{1}{4}}}} \text{ is}$$

- (a)  $\frac{1}{8}$                       (b)  $\frac{1}{64}$   
 (c)  $\frac{1}{16}$                      (d)  $\frac{1}{32}$

उत्तर (a)

उदा.2 यदि  $2 = x + \frac{1}{1 + \frac{1}{3 + \frac{1}{4}}}$  है तो x का मान ज्ञात करें।

- (a)  $\frac{18}{17}$                       (b)  $\frac{21}{17}$   
 (c)  $\frac{13}{17}$                      (d)  $\frac{12}{17}$

उत्तर (b)

उदा.3  $999 \frac{998}{999} \times 999$  किसके बराबर है ?  
 (a) 998999                      (b) 999899  
 (c) 989999                     (d) 999989

उत्तर (a)

उदा.4  $\frac{1}{5} + 999 \frac{494}{495} \times 99$  का मान ज्ञात करें।  
 (a) 90000                      (b) 99000  
 (c) 90900                     (d) 99990

उत्तर (b)

### बीजगणितीय सूत्रों पर आधारित



उदा.1  $\left(\sqrt{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2$  के बराबर है ?

- (a)  $2\frac{1}{2}$                       (b)  $3\frac{1}{2}$   
 (c)  $4\frac{1}{2}$                      (d)  $5\frac{1}{2}$

उत्तर (c)

उदा.2  $\frac{0.51 \times 0.051 \times 0.051 + 0.041 \times 0.041 \times 0.041}{0.51 \times 0.051 - 0.051 \times 0.041 + 0.041 \times 0.041}$  का मान क्या है ?

- (a) 0.92                      (b) 0.092  
 (c) 0.0092                    (d) 0.00092

उत्तर (b)

### श्रेणी आधारित (समान्तर श्रेणी, गुणोत्तर श्रेणी, हरात्मक श्रेणी)



उदा.1 50 से कम 3 के सभी गुणजों का योगफल ज्ञात करें ?

- (a) 400                      (b) 408  
 (c) 404                      (d) 412

उत्तर (b)

उदा.2 निम्नलिखित समान्तर श्रेणी में कितने पद हैं ?  
 7, 13, 19, ..... , 205

उदा.3 5 के उन सभी घनात्मक गुणकों का योग ज्ञात करें जो 100 से कम हैं ?

### समीकरण आधारित



उदा.1 एक पर्यटक प्रतिदिन उतने ही रुपये खर्च करता है जितने उसके पर्यटन के दिनों की संख्या है। उसका कुल खर्च रुपये 361 है, तो ज्ञात करें कि उसका पर्यटन कितने दिनों तक चला ?

- (a) 17 days                      (b) 19 days  
 (c) 21 days                      (d) 31 days

उत्तर (b)

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योग 22 है, और उनके वर्गों का योग 404 है, तो उन संख्याओं का गुणनफल ज्ञात करें ?

- (a) 40                      (b) 44  
 (c) 80                      (d) 89

उत्तर (a)

उदा.3 जब एक दो अंकों की संख्या को उसके अंकों के योग से गुणा किया जाता है, तो गुणनफल 424 होता है। जब उसके अंकों को आपस में बदलने से प्राप्त संख्या को अंकों के योग से गुणा किया जाता है तो परिणाम 280 होता है। संख्या के अंकों का योग कितना है ?

(a) 7

(b) 9

(c) 6

(d) 8

उत्तर (d)

## कश्णी व घातांक (Surds and Indices)



**कश्णी** - वे शशियाँ जिनका मूल मान ठीक-ठीक नहीं निकाला जा सके, उन्हे कश्णी कहते हैं।

- यदि  $a$  एक परिमेय संख्या है तथा  $m$  एक धन पूर्णांक है, तो  $a$  का  $m$ वाँ मूल या  $a^{\frac{1}{m}}$  या  ${}^m\sqrt{a}$  एक अपरिमेय संख्या होगी, यहाँ पर  ${}^m\sqrt{a}$  एक कश्णी है।

जैसे -  $\sqrt{2}, \sqrt{3}$  इत्यादि।

- कश्णी के अनेक रूप हैं जैसे -  $\sqrt{\quad}, \sqrt[3]{\quad}, \sqrt[4]{\quad}, \sqrt[5]{\quad} \dots$

- $a^{\frac{1}{m}}$  को  $m$ वाँ घात युक्त कश्णी कहा जाता है।
- जब कश्णी की घात और कश्णीगत संख्या (अर्थात् कश्णी में लिखी संख्या) दोनों समान होती हैं तब कश्णियों को सजातीय कश्णी कहते हैं।

जैसे-  $\sqrt{x}, 3\sqrt{x}, 7\sqrt{x}$

- जब कश्णियों की घाते अलग-अलग हो या कश्णीगत संख्याएँ अलग-अलग हो या घातें और कश्णीगत संख्याएँ दोनों अलग-अलग हो तो उनको विजातीय कश्णी कहते हैं।

जैसे-  $\sqrt[3]{xy}, \sqrt[3]{x}, \sqrt[2]{5y}$  आदि

### जब पूरी शशि कश्णीगत हो

- यदि कश्णी में लिखी संख्या के दो क्रमागत गुणनखण्ड न हो सके तो पूरी शशि को  $x$  के बराबर मानकर दोनों पक्षों का वर्ग करके द्विघात समीकरण रूप ( $ax^2 + bx + c = 0$ ) में बदलेंगे।

- तब श्री धराचार्य सूत्र से  $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

### कश्णियों में संक्रियाएँ

#### (1) कश्णी का योग व अंतर

केवल सजातीय कश्णियों को ही आपस में जोड़ा या घटाया जा सकता है।

उदा.  $\sqrt{75} + \sqrt{48}$

$$\begin{aligned} \text{हल- } & \sqrt{25 \times 3} + \sqrt{16 \times 3} \\ & = 5\sqrt{3} + 4\sqrt{3} \\ & = 9\sqrt{3} \end{aligned}$$

$$\text{उदा. } \sqrt{27} - \sqrt{12}$$

$$\begin{aligned} \text{हल- } & \sqrt{9 \times 3} - \sqrt{4 \times 3} \\ & = 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3} \\ & = \sqrt{3} \end{aligned}$$

#### (2) कश्णी का गुणा-भाग

कश्णियों का गुणा भाग तभी संभव है जब उनकी घातें समान हो।

$$\text{उदा. } \sqrt[3]{2} \times \sqrt[3]{5} \times \sqrt[3]{4}$$

$$\begin{aligned} \text{हल- } & \sqrt[3]{2 \times 5 \times 4} \\ & = \sqrt[3]{40} \end{aligned}$$

$$\text{उदा. } 12 \times 4^{1/3} \text{ में } 3\sqrt{2} \text{ से भाग दो।}$$

$$\begin{aligned} \text{हल- } & \frac{12 \times 4^{1/3}}{3\sqrt{2}} = \frac{4 \times 4^{1/3}}{2^{1/2}} = \frac{4 \times 4^{2/6}}{2^{3/6}} \\ & = 4 \times \left[ \frac{4^2}{2^3} \right]^{1/6} = 4 \times \left[ \frac{16}{8} \right]^{1/6} \\ & = 4 \times 2^{1/6} \end{aligned}$$

### कश्णियों के कुछ महत्वपूर्ण परिणाम

- (1)  $\sqrt{a} \times \sqrt{a} = a$
- (2)  $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$
- (3)  $\sqrt{a^2} \times b = a\sqrt{b}$
- (4)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = a + b + 2\sqrt{ab}$
- (5)  $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{ab}$
- (6)  $(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b}) = a - b$
- (7)  $\sqrt{2} = 1.41421$
- (8)  $\sqrt{3} = 1.73205$
- (9)  $\sqrt{5} = 2.23607$
- (10)  $\sqrt{6} = 2.44949$



### शंयुग्मी

- ऐसी दो पद वाली कश्णी जिनके दोनों पद एक समान होते हैं लेकिन उन दोनों पदों के बीच प्रयुक्त चिह्न अशमान होते हैं तो ऐसी कश्णियों को शंयुग्मी कश्णी कहते हैं ।
- इस प्रकार की शशियों का मान ज्ञात करने के लिए हर की शंयुग्मी से अंश व हर दोनों से गुणा करते हैं ।

उदा.  $\frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1}$  का मान ज्ञात कीजिए ।

$$\begin{aligned}
 \text{हल-} \Rightarrow & \frac{\sqrt{3}-1}{\sqrt{3}+1} \times \frac{(\sqrt{3}-1)}{(\sqrt{3}-1)} = \frac{(\sqrt{3}-1)^2}{(\sqrt{3})^2 - (1)^2} \\
 = & \frac{3+1-2\sqrt{3}}{3-1} \\
 = & \frac{4-2\sqrt{3}}{2} \\
 = & \frac{2(2-\sqrt{3})}{2} \\
 = & 2-\sqrt{3}
 \end{aligned}$$

### कश्णियों की तुलना (बडा या छोटा)

- दिये गये कश्णियों में से सबसे बडा या छोटा निकालने के लिए हम घातांक को समान करते हैं तथा आघार की तुलना करते हैं ।

उदा.  $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$  में सबसे बडी संख्या कौनसी है ?

हल-  $\sqrt[3]{5}, \sqrt{4}, \sqrt[3]{6}$  की घातें 3, 2, 3 हैं जिनका LCM = 6 है ।

$$\sqrt[3]{5} = \sqrt[6]{5^2} = \sqrt[6]{25}$$

$$\sqrt{4} = \sqrt[6]{4^3} = \sqrt[6]{64}$$

$$\sqrt[3]{6^2} = \sqrt[6]{36}$$

$$\text{अतः सबसे बडी संख्या} = \sqrt[6]{64} = \sqrt{4}$$

**घातांक** - किसी संख्या को उसी से जितनी बार गुणा करते हैं उतने को उस संख्या की घात कहते हैं और उस संख्या को आघार कहते हैं ।

### घातांक के कुछ महत्वपूर्ण नियम

- $a^m = a \times a \times a \times \dots \dots \dots m$  बार
- $(a^m)^n = a^{mn}$
- $a^m \times a^n = a^{(m+n)}$
- $a^m \div a^n = a^{(m-n)}$
- $[(a^m)^n]^l = a^{mnl}$
- $a^{-m} = \frac{1}{a^m}$
- $a^0 = 1$  {किसी भी संख्या की घात शून्य हो तो, उस पूरी शशि का मान 1 होता है।}
- $(a/b)^{-m} = (b/a)^m$
- $a^m = b^n$   
 $a = (b)^{n/m}$  or  $b = (a)^{m/n}$
- $a^m = b$  तो  $a = b^{1/m}$

- यदि Power भिन्न रूप में हो तो बडा या छोटा value निकालना हो घात के हर का ल.श.प. लेंगे और ल.श.प. से प्रत्येक घात को गुणा करेंगे और जिसकी बडी value आयेगी वह बडा होगा और जिसकी छोटी value आयेगी वह छोटा होगा ।

उदा.  $(2)^{1/4}, (3)^{1/6}, (4)^{1/8}, (8)^{1/12}$

$$\text{हल-} (2)^{\frac{1}{4} \times 24} = 2^6 = 64$$

$$(3)^{\frac{1}{6} \times 24} = 3^4 = 81$$

$$(4)^{\frac{1}{8} \times 24} = 4^3 = 64$$

$$(8)^{\frac{1}{12} \times 24} = 8^2 = 64$$

अतः  $3^{1/6}$  बडा है (नोट - यहाँ 4, 6, 8, 12 का ल.श.प. 24 है ।)

### अभ्यास प्रश्न

उदा.1  $\sqrt{214 + \sqrt{107 + \sqrt{196}}}$  का मान है ।

- 23
- 15
- 24
- 18

उत्तर- (b)

उदा.2 निम्न का मान क्या होगा ?