Toppersnotes
Unleash the topper in you

HARYANA - CET

संयुक्त योग्यता परीक्षा

हरियाणा कर्मचारी चयन आयोग

भाग – 4

गणित

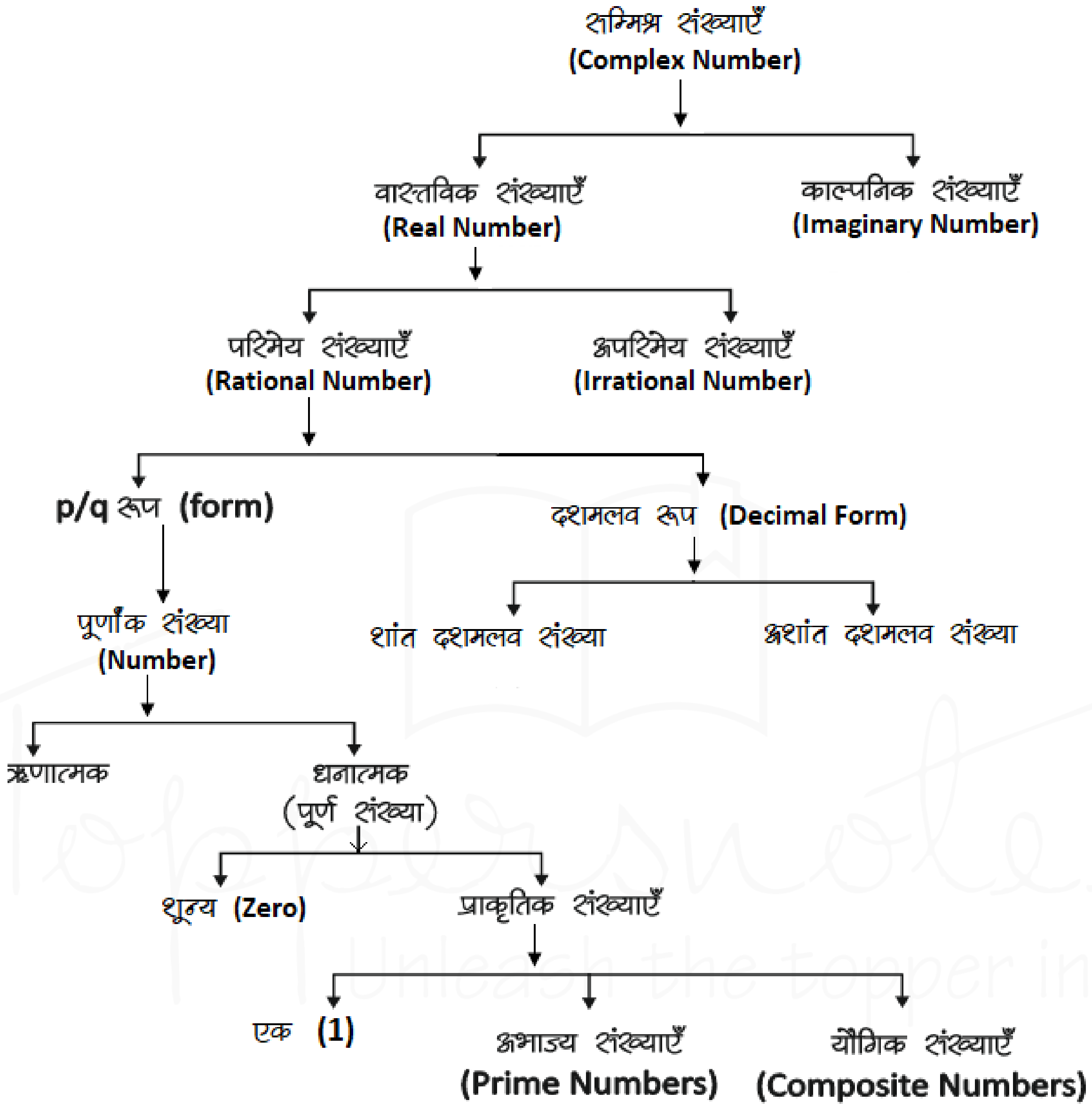
SIERRA INNOVATIONS

HARYANA - CET

CONTENT

गणित

संख्या पद्धति (Number System)



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

Z = वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$\boxed{Z = a + ib}$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या
b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं । इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है ।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है ।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती है, इसे I से सूचित करते हैं ।

I = {–4, –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3, 4,.....}

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं ।

N = {1, 2, 3, 4, 5, ...}

पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं ।

W = {0, 1, 2, 3, 4, 5, ...}

चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है ।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती है ।

n वां पद = 2n

प्रथम n सम संख्याओं का योग = n(n+1)

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2}\right\}$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं ।

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$\left\{n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2}\right\}$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग $= \frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग $= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है ।

उदाहरण – $11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference 144 – 121 = 23

<u>अभाज्य संख्याएँ (**Prime Numbers**)</u> – जिसके सिर्फ दो form हो– $1 \times$ संख्या

जैसे – {2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19........}

जहाँ 1 Prime Number नहीं है ।

2 एकमात्र सम Prime संख्या है ।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोडा है ।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9
25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6
1-50 तक कुल 15 Prime Number है ।
51-100 तक कुल 10 Prime Number है ।
अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है ।
1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46
1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62
1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78
1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्याएँ – वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण – (4,9), (15, 22), (39, 40)
HCF = 1

Perfect Number (परफेक्ट संख्या) – वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोडकर)
उदाहरण – 6 → 1, 2, 3 → यहाँ 1+2+3 → 6
28 → 1, 2, 4, 7, 14 → 1+2+4+7+14 → 28

परिमेय **(Rational)** संख्याएँ – वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए ।

उदाहरण – 2/3, 4/5, $\frac{10}{-11}$, $\frac{7}{8}$

अपरिमेय **(Irrational)** संख्याएँ – इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता ।

उदाहरण – $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26} \ldots \ldots$

पूर्णवर्ग संख्या
↓

Unit Digit जो वर्ग के हो सकते है	जो नहीं हो सकते
0	2 ——
1	3 ——
4	7 ——
5 or 25	8 ——
6	
9	

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे ।

नोट – अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए ।

भाजकों की संख्या या गुणनसंख्या की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोडकर गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी ।

उदाहरण – 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है ।

हल – $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$

भाजकों की संख्या $= (3+1)\ (1+1)\ (1+1)\ (1+1)$

$= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

इकाई का अंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो

   जब Base का इकाई अंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई अंक वही रहेगा ।

   जब base का इकाई अंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देंगे और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई अंक पर power रखेंगे । जब power, 4 से पूर्णतः कट जाता है तो base के इकाई अंक पर 4 power रखेंगे ।

2. सरलीकरण के रूप में हो

   प्रत्येक संख्या के इकाई के अंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई अंक उत्तर होगा ।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

   n विषम होने पर (a+b) इसका भाजक होगा ।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो ।

   n विषम होने पर भाजक $\rightarrow$ (a–b)

   n सम होने पर भाजक $\rightarrow$ (a – b) या (a + b) या दोनों ।

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ अंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे – 0.25, 0.15, 0.375 इसे भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है ।

अशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते है और ये दो तरह के हो सकते है ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183..........

पुनरावृत्ति Repeating	जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अनंत तक । इसे भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non Repeating Decimal	जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे - $\frac{1}{3} = 0.333...,\frac{22}{7} = 3.14285714.....$ ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं ।

$0.333..... = 0.\overline{3}$

$\frac{22}{7} = 3.14285714.... = 3.14\overline{2857}$

इसे बार बोलते हैं ।

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.\overline{P} = \frac{P}{9}$ $\quad 0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$ $\quad 0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले –

$0.p\overline{q} = \frac{pq-p}{90}$ $\quad 0.pq\overline{r} = \frac{pqr-pq}{900}$

$0.p\overline{qr} = \frac{pqr-p}{990}$ $\quad 0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs-pq}{9900}$

उदाहरण – (i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625-6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524-35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1	$\rightarrow$	I
2	$\rightarrow$	II
3	$\rightarrow$	III
4	$\rightarrow$	IV
5	$\rightarrow$	V
6	$\rightarrow$	VI
7	$\rightarrow$	VII
8	$\rightarrow$	VIII

9	→	IX
10	→	X
20	→	XX
30	→	XXX
40	→	XL
50	→	L
100	→	C
500	→	D
1000	→	M

विभाजकता के नियम

2 से	अन्तिम अंक सम संख्या या शून्य (0) हो जैसे – 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या मे अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी । जैसे – 729, 12342, 5631
4 से	अन्तिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे – 1024, 58764, 567800
5 से	अन्तिम अंक शून्य या 5 हो जैसे – 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी जैसे – 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अन्तिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी । जैसे – 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अन्तिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो । जैसे – 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभक्त होगी ।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व सम स्थानों पर अंकों के योग का अन्तर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे – 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अन्तिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोडने पर संख्या अगर 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी । जैसे – 222222, 17784

हल सहित उदाहरण

संख्याओं के योग, अंतर तथा गुणनफल पर आधारित

उदा.1 यदि किसी संख्या का 3/4 उस संख्या के 1/6 से 7 अधिक है, तो उस संख्या 5/3 क्या होगा ?

(a) 12 (b) 18 (c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

हल माना कि संख्या = x

प्रश्नानुसार,

$\Rightarrow \frac{9x - 2x}{12} = 7$

$\Rightarrow 7x = 7 \times 12$

$\Rightarrow x = 12$

$\Rightarrow$ संख्या का 5/3 भाग

$= \frac{x - 5}{3} \Rightarrow \frac{12 \times 5}{3} = 20$

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा ।

(a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c)

हल माना दो संख्याएँ P तथा Q हैं ।

$P + Q = a$

$PQ = b$

$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{Q + P}{PQ} = \frac{a}{b}$

उदा.3 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

(a) 1350 (b) 1250
(c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

हल माना बडी संख्या x तथा छोटी संख्या y हैं ।

$\therefore x + y = 75$ .... (i)

तथा $x - y = 25$ .... (ii)

$2x = 100$ (समी. (i) एवं समी. (ii)) को जोडने पर

$x = 50$

x का मान समी. (i) में रखने पर

$50 + y = 75$

$y = 75 - 50 = 25$

अतः दोनों संख्याओं का गुणनफल $= xy$

$= 50 \times 25 \Rightarrow 1250$

सम, विषम तथा अभाज्य संख्याओं पर आधारित

उदा.1 यदि किन्हीं तीन क्रमागत विषम प्राकृत संख्याओं का योग 147 हो, तो बीच वाली संख्या होगी ।

(a) 47 (b) 48 (c) 49 (d) 51

उत्तर (c)

हल x = कोई विषम संख्या है ।

प्रश्नानुसार,

(x) + (x + 2) + (x + 4) = 147

3x +6 = 147

$x = \frac{141}{3} = 47$

Middle Number (x + 2) = 47 + 2 = 49

उदा.2 तीन अभाज्य संख्याओं का योग 100 है यदि उनमें से एक संख्या दूसरी संख्या से 36 अधिक हो तो एक संख्या क्या होगा ?

हल x + y + z = 100

{x = 2 अवश्य होगा}

2 + y + z = 100 y + z = 100 - 2= 98

y - z = 36 2y = 134

y = 1 x =2

z = 98 - 67 = 31 उत्तर

भाग, भागफल तथा शेषफल पर आधारित

उदा.1 64329 को जब किसी सख्या से भाग दिया जाता है, तो 175, 114 तथा 213 लगातार तीन शेषफल आते है तो भाज्य क्या है ?

(a) 184 (b) 224 (c) 234 (d) 296

उत्तर (c)

हल

xxx)64329 xxx

$\frac{xxx}{1752}$ (i)

$\frac{xxx}{1149}$ (ii)

$\frac{xxx}{213}$ (iii)

Number at (1) = 643 –175 = 468

Number at (2) = 1752 = 114 - 1638

Number at (3) - 1149 - 213 = 936

H.C.F. of 468, 1638, 936 = 234

The divisor is 234. उत्तर

उदा.2 ($3^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28}$ विभाजित है ।

(a) 11 (b) 16 (c) 25 (d) 30

उत्तर (d)

हल ($35^{25} + 3^{26} + 3^{27} + 3^{28}$)

3^{25} ($3^0 + 3^1 + 3^2 + 3^3$)

$3^{25} \times 40 = 3^{24} \times 120$

(अब विकल्प चेक करें इसे केवल 30 ही विभाजित कर सकता है)

इकाई अंक निकालना आधारित

उदा.1 $416 \times 333 + 2167 \times 118 - 114 \times 133$ के परिणाम का इकाई अंक ज्ञात कीजिए ?

हल $6 \times 3 + 7 \times 8 - 4 \times 3$

$18 + 56 - 12 = 62$

$= 2$ उत्तर

उदा.2 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई अंक कितना है ?

(a) 0 (b) 2

(c) 3 (d) 5

हल $(3694)^{1793}$ में इकाई अंक = (4)1793 में इकाई $= \left\{ \left(4^2\right)^{896} \times 4 \right\}$ में इकाई अंक

$= (6 \times 4)$ में इकाई अंक = 4

$(615)^{317}$ में इकाई अंक $= (5)^{317}$ में इकाई अंक = 5

$(841)^{491}$ में इकाई अंक $= (1)^{491}$ में इकाई अंक = 1

5 x 4 x 1 = 20 इकाई अंक = 0

प्राकृतिक संख्याओं के **square** एवं **cube** तथा उनके योग एवं अंतर – आधारित

उदा.1 $\left(11^2 + 12^2 + 13^2 + ... + 20^2\right) = ?$

(a) 385 (b) 2485

(c) 2870 (d) 3255

हल हम जानते हैं कि : $\left(1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2\right) = \frac{1}{6} n(n+1)(2n+1)$

$\therefore$ दिया गया व्यंजक $= \left(1^2 + 2^2 + ... + 10^2 + 11^2 + ... + 20^2\right) - \left(1^2 + 2^2 + ... + 10^2\right)$

$$= \left(\frac{1}{6} \times 20 \times 21 \times 41\right) - \left(\frac{1}{6} \times 10 \times 11 \times 21\right) = (2870 - 385) = 2485.$$

उदा.2 $1^3+2^3+3^3+......+10^3=?$

हल n = 10

$\because \sum N^3 = \left\{\frac{N(N+1)}{2}\right\}^2$

$\therefore\ ? = \left\{\frac{10(10+1)}{2}\right\}^2 = \left(\frac{11\times10}{2}\right)^2$

$=55^2=3025$

शून्य की संख्या पर आधारित

उदा.1 $\left(1^1\times2^2\times3^3\times4^4\times..........\times98^{98}\times99^{99}\times100^{100}\right)$ के गुणनफल में जीरो (शून्यों) की संख्या ज्ञात करें ?

(a) 1200 (b) 1300
(c) 1500 (d) 1600

हल (b) शून्यों की संख्या 5 की संख्या तथा 2 की संख्या पर निर्भर करता है ।

5 की संख्या $=(5+10+15+.......+100)+(25+50+75+100)$

$=5(1+2+..........20)+250$

$=5\times\frac{20\times21}{2}+250$

$=1050+250=1300$

उदा.2 $1\times2\times3\times..........\times250$ को गुणा किया जाए तो परिणाम के अंत में कितने 0 होंगे ?

हल $\frac{250}{5}=50$

$\frac{50}{5}=10$

$\frac{10}{5}=2$

$\therefore$ शून्यों की संख्या $=50+10+2=62$

सबसे बडी तथा सबसे छोटी संख्या/भिन्न ज्ञात करना आधारित

उदा.1 निम्न मे से $\frac{2}{5}$ और $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित भिन्न है ?

(a) $\frac{3}{7}$ (b) $\frac{2}{3}$
(c) $\frac{4}{5}$ (d) $\frac{1}{2}$

हल (a)

$\frac{2}{5} = 0.40$ $\frac{4}{9} = 0.44$

$\frac{3}{7} = 0.43$ $\frac{2}{3} = 0.66$

$\frac{4}{5} = 0.80$ $\frac{1}{2} = 0.50$

स्पष्टतः भिन्न $\frac{3}{7}, \frac{2}{5}$ तथा $\frac{4}{9}$ के बीच उपस्थित है।

उदा.2 निम्न में से बडी संख्या है। $(3)^{\frac{1}{3}}, (2)^{\frac{1}{2}}, 1, (6)^{\frac{1}{6}}$

(a) $(2)^{\frac{1}{2}}$ (b) 1

(c) $(6)^{\frac{1}{6}}$ (d) $(3)^{\frac{1}{3}}$

हल (d)

(घातों का ल.स.प. लेने पर) (3, 2, 1 और 6) = 12

$(3)^{1/3} \Rightarrow (3^4)^{1/12} = 81^{1/12}$

$(2)^{1/3} \Rightarrow (2^6)^{1/12} = 64^{1/12}$

$(1) \Rightarrow (1^{12})^{1/12} = 1^{1/12}$

$(6)^{1/6} \Rightarrow (6^2)^{1/12} = 36^{1/12}$

अतः बडी संख्या = $(3)^{\frac{1}{3}}$ है।

आरोही/अवरोही क्रम आधारित

उदा.1 $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ को बढते क्रम में लिखने पर –

(a) $\sqrt{2}, \sqrt[3]{4}, \sqrt[4]{6}$ (b) $\sqrt[4]{6} < \sqrt{2} < \sqrt[3]{4}$

(c) $\sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4} < \sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

हल 2, 3, 4 का ल. स. = 12

$$\sqrt{2} = \left(2^{\frac{1}{2}}\right) = \left(2^6\right)^{\frac{1}{12}} = (64)^{\frac{1}{12}}$$

$$\sqrt[4]{6} = 6^{\frac{1}{4}} = \left(6^3\right)^{\frac{1}{12}} = (216)^{\frac{1}{12}}$$

स्पष्ट है कि $(64)^{\frac{1}{12}} < (216)^{\frac{1}{12}} < (256)^{\frac{1}{12}}$

अर्थात् $\sqrt{2} < \sqrt[4]{6} < \sqrt[3]{4}$

उदा.2 निम्नलिखित को आरोही क्रम में सजाएँ –

$\sqrt{7}-\sqrt{5}, \sqrt{5}-\sqrt{3}, \sqrt{9}-\sqrt{7}, \sqrt{11}-\sqrt{9}$

हल $\sqrt{7}-\sqrt{5}=\frac{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(\sqrt{7}+\sqrt{5})}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{7-5}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}$

$\sqrt{5}-\sqrt{3}=\frac{(\sqrt{5}-\sqrt{3})\times(\sqrt{5}+\sqrt{3})}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{5-3}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}=\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

इसी तरह, $\sqrt{9}-\sqrt{7}=\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}$ एवं $\sqrt{11}-\sqrt{9}=\frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}}$

हम जानते हैं कि हर में वृद्धि के साथ-साथ भिन्न का मान कम होता जाता है । इसलिए,

$\frac{2}{\sqrt{11}+\sqrt{9}}<\frac{2}{\sqrt{9}+\sqrt{7}}<\frac{2}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}<\frac{2}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}$

या $\sqrt{11}-\sqrt{9}<\sqrt{9}-\sqrt{7}<\sqrt{7}-\sqrt{5}<\sqrt{5}-\sqrt{3}$

नोट – उपर्युक्त उदाहरण से एक महत्वपूर्ण परिणाम की प्राप्ति हुई । इसे याद रखना चाहिए ।

उदा.3 संख्याओं $\frac{7}{9},\frac{11}{13},\frac{16}{19},\frac{21}{25}$ को अवरोही क्रम में लिखिये ?

हल प्रत्येक दी गई संख्या को दषमलव भिन्न में व्यक्त करने पर –

$\frac{7}{9}=0.777, \frac{11}{13}=0.846, \frac{16}{19}=0.842$ तथा $\frac{21}{25}=0.840.$

अवरोही क्रम में लेने पर :

$0.846>0.842>0.840>0.777$

अतः $\frac{11}{13}>\frac{16}{19}>\frac{21}{25}>\frac{7}{9}$

गुणनखंडों की संख्या पर आधारित

उदा.1 $\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ तथा $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का उभयनिश्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127 (b) 97

(c) 30 (d) 224

हल (x^m+y^m) का एक गुणनखण्ड $(x+y)$ है यदि m विषम हो ।

$\therefore\left\{(127)^{127}+(97)^{127}\right\}$ का एक गुणनखण्ड $(127+97)=224$ है ।

इसी प्रकार, $\left\{(127)^{97}+(97)^{97}\right\}$ का एक गुणनखण्ड $(127+97)=224$ है ।

अतः दोनों का उभयनिष्ठ गुणनखण्ड 224 है ।

उदा.2 $\frac{(18)^{15}\times(75)^{16}\times(42)^{14}}{(35)^{12}\times(12)^{16}}$ में कितने अभाज्य खंड है ?

हल $(18)^{15}$ में अभाज्य खंड $= 3 \times 15 = 45$

$(75)^{16}$ में अभाज्य खंड $= 3 \times 16 = 48$

$(42)^{14}$ में अभाज्य खंड $= 3 \times 14 = 42$

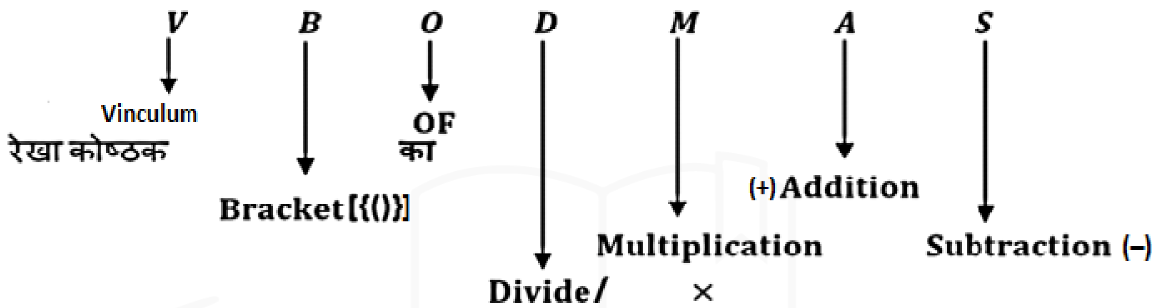
$(35)^{12}$ में अभाज्य खंड $= 2 \times 12 = 24$

$(12)^{16}$ में अभाज्य खंड $= 3 \times 16 = 48$

अभाज्य खंडों की संख्या $= (45 + 48 + 42) - (24 + 48) = 135 - 72 = 63$

सरलीकरण (Simplification)

- सरलीकरण के अंतर्गत हम दिए गये आँकडों को सरल रूप में प्रदर्शित करते है जैसे कि आँकडे भिन्न में, दशमलव में, बट्टे में, घात में तथा Mathematical Operation को हल करके या रूप बदल के किया जाता है ।
- यदि कुछ संख्या पर भिन्न-भिन्न प्रकार के Operation दिये हो तो हम उसे कैसे हल करे कि प्रश्न का उत्तर सही आये उसके लिये एक Rule होता है जिसे हम VBODMAS का Rule कहते है ।
- हम पहले कौनसा Operation करे, यह VBODMAS का Rule तय करता है ।



- इन सभी गणितीय क्रियाओं में सबसे पहले V है जिसका मतलब Vinculum (रेखा कोष्ठक) है । यदि प्रश्न में रेखा कोष्ठक है तो सर्वप्रथम उसे हल करेंगे और उसमें फिर (BODMAS) Rule कार्य करेगा
- द्वितीय स्थान पर B (Bracket) मतलब कोष्ठक है जो निम्न हो सकते है-
  1. छोटा कोष्ठक ( )
  2. मंझला कोष्ठक { }
  3. बडा कोष्ठक [ ]
- सबसे पहले छोटा कोष्ठक, फिर मंझला कोष्ठक और उसके बाद बडा कोष्ठक हल किया जाता है ।
- तृतीय स्थान पर "O" है जो कि "of" या "Order" से बना है, जिसका मतलब ''गुणा'' से या ''का'' से होता है ।
- चतुर्थ स्थान पर "D" है जिसका मतलब "Division" है, दिए गये व्यंजन में भिन्न-भिन्न क्रियाओं में सबसे पहले भाग करते है यदि दिया है तो ।
- पंचम स्थान पर "M" है जिसका मतलब "Multiplication" है, दिये गए व्यंजन में "Division" के बाद "Multiplication" (गुणा) करेंगे ।
- छठा स्थान "A" रखता है जो "Addition" (जोडा) से संबंधित है । Division-multiplication के बाद Addition क्रिया होती है ।
- सप्तम स्थान पर "S" है जो "Subtraction" से बना है ।

प्रश्न. सरल कीजिए ।

$$\left[3\frac{1}{4}\div\left\{1\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{of }4\frac{1}{3}\right)$$

हल Step 1 – सबसे पहले सभी मिश्र भिन्नों को साधारण भिन्नों में बदलते है ।

$$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\overline{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{ of }\frac{13}{3}\right)$$

अब VBODMAS के अनुसार

Step 2 – $$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{3-2}{12}\right)\right\}\right]\div\left(\frac{1}{2}\text{ of }\frac{13}{3}\right)$$

Step 3 – $$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}-\frac{1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 4 – $$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\left(\frac{30-1}{12}\right)\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 5 – $$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{5}{4}-\frac{1}{2}\times\frac{29}{12}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 6 – $$\left[\frac{13}{4}\div\left\{\frac{30-29}{24}\right\}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 7 – $$\left[\frac{13}{4}\div\frac{1}{24}\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 8 – $$\left[\frac{13}{4}\times 24\right]\div\frac{13}{6}$$

Step 9 – $$13\times 6\times\frac{6}{13}$$

= 36 Ans.

बीजगणितीय सूत्र

1. $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
2. $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
3. $(a + b)^2 + (a - b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
4. $(a^2 - b^2) = (a + b)(a - b)$
5. $a^2 + b^2 + c^2 = (a + b + c)^2 - 2(ab + bc + ca)$
6. $a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2$
7. $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \frac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b+c)^2 + (c-a)^2\right]$
8. $a^3 + b^3 = (a + b)^3 - 3ab(a + b) = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$
9. $a^3 - b^3 = (a - b)^3 + 3ab(a - b) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$
10. $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

$$=\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}$$

यदि $a + b + c = 0$ हो तो

$a^3 + b^3 + c^3 = 3abc$

वर्ग तथा वर्गमूल तालिका

Square	Square Root	Square	Square Root
$1^2 = 1$	$\sqrt{1} = 1$	$16^2 = 256$	$\sqrt{256} = 16$
$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	$17^2 = 289$	$\sqrt{289} = 17$
$3^2 = 9$	$\sqrt{9} = 3$	$18^2 = 324$	$\sqrt{324} = 18$
$4^2 = 16$	$\sqrt{16} = 4$	$19^2 = 361$	$\sqrt{361} = 19$
$5^2 = 25$	$\sqrt{25} = 5$	$20^2 = 400$	$\sqrt{400} = 20$
$6^2 = 36$	$\sqrt{36} = 6$	$21^2 = 441$	$\sqrt{441} = 21$
$7^2 = 49$	$\sqrt{49} = 7$	$22^2 = 484$	$\sqrt{484} = 22$
$8^2 = 64$	$\sqrt{64} = 8$	$23^2 = 529$	$\sqrt{529} = 23$
$9^2 = 81$	$\sqrt{81} = 9$	$24^2 = 576$	$\sqrt{576} = 24$
$10^2 = 100$	$\sqrt{100} = 10$	$25^2 = 625$	$\sqrt{625} = 25$
$11^2 = 121$	$\sqrt{121} = 11$	$26^2 = 676$	$\sqrt{676} = 26$
$12^2 = 144$	$\sqrt{144} = 12$	$27^2 = 729$	$\sqrt{729} = 27$
$13^2 = 169$	$\sqrt{169} = 13$	$28^2 = 784$	$\sqrt{784} = 28$
$14^2 = 196$	$\sqrt{196} = 14$	$29^2 = 841$	$\sqrt{841} = 29$
$15^2 = 225$	$\sqrt{225} = 15$	$30^2 = 900$	$\sqrt{900} = 30$

घन और घनमूल तालिका

Cube	Cube Root	Cube	Cube Root
$1^3 = 1$	$\sqrt[3]{1} = 1$	$16^3 = 4096$	$\sqrt[3]{4096} = 16$
$2^3 = 8$	$\sqrt[3]{8} = 2$	$17^3 = 4913$	$\sqrt[3]{4913} = 17$
$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	$18^3 = 5832$	$\sqrt[3]{5832} = 18$
$4^3 = 64$	$\sqrt[3]{64} = 4$	$19^3 = 6859$	$\sqrt[3]{6859} = 19$
$5^3 = 125$	$\sqrt[3]{125} = 5$	$20^3 = 8000$	$\sqrt[3]{8000} = 20$
$6^3 = 216$	$\sqrt[3]{216} = 6$	$21^3 = 9261$	$\sqrt[3]{9261} = 21$
$7^3 = 343$	$\sqrt[3]{343} = 7$	$22^3 = 10648$	$\sqrt[3]{10648} = 22$
$8^3 = 512$	$\sqrt[3]{512} = 8$	$23^3 = 12167$	$\sqrt[3]{12167} = 23$
$9^3 = 729$	$\sqrt[3]{729} = 9$	$24^3 = 13824$	$\sqrt[3]{13824} = 24$
$10^3 = 1000$	$\sqrt[3]{1000} = 10$	$25^3 = 15625$	$\sqrt[3]{15625} = 25$
$11^3 = 1331$	$\sqrt[3]{1331} = 11$	$26^3 = 17576$	$\sqrt[3]{17576} = 26$

$12^3 = 1728$	$\sqrt[3]{1728} = 12$	$27^3 = 19683$	$\sqrt[3]{19683} = 27$
$13^3 = 2197$	$\sqrt[3]{2197} = 13$	$28^3 = 21952$	$\sqrt[3]{21952} = 28$
$14^3 = 2744$	$\sqrt[3]{2744} = 14$	$29^3 = 24389$	$\sqrt[3]{24389} = 29$
$15^3 = 3375$	$\sqrt[3]{3375} = 15$	$30^3 = 27000$	$\sqrt[3]{27000} = 30$

हल सहित उदाहरण

VBODMAS – आधारित

उदा.1 The value of $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$ is –

(a) $4\frac{32}{75}$ (b) $4\frac{8}{75}$ (c) $4\frac{2}{3}$ (d) $4\frac{1}{6}$

उत्तर (d)

हल $24 \times 2 \div 12 + 12 \div 6$ of $2 \div (15 \div 8 \times 4)$ of $(28 \div 7$ of $5)$

$= 24 \times (2/12) + 12 \div 12 \div [(15/8) \times 4]$ of $(28 \div 35)$

$\Rightarrow 4 + 1 \div (15/2)$ of $4/5$

$\Rightarrow 4 + 1 \div 6$

$\Rightarrow 4 + 1/6$

$\Rightarrow 4\frac{1}{6}$ Ans.

उदा.2 सरल करें

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3}\right)$$

हल प्रश्नानुसार,

$$\left[3\frac{1}{4} \div \left\{1\frac{1}{4} - \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \text{ of } 4\frac{1}{3}\right)$$

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right)\right\}\right] \div \left(\frac{1}{2} \times \frac{13}{3}\right)$$

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{30-3-2}{12}\right)\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{1}{2} \times \frac{25}{12}\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{5}{4} - \frac{25}{24}\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

$$\left[\frac{13}{4} \div \left\{\frac{30-25}{24}\right\}\right] \div \frac{13}{6}$$

$$\left[\frac{13}{4}\div\frac{5}{24}\right]\div\frac{13}{6}$$

$$\frac{13}{4}\times\frac{24}{5}\Rightarrow\frac{13\times6}{5}\Rightarrow\frac{36}{5}$$

$$\Rightarrow\frac{36}{5}\Rightarrow7\frac{1}{5}$$

उदा.3 सरल करें ।

$$2\frac{3}{4}\div\ 1\frac{5}{6}\div\ \frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{7}\div\frac{3}{4}\text{ of }\frac{3}{7}$$

(a) $\frac{56}{77}$ (b) $\frac{49}{80}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $3\frac{2}{9}$

हल प्रश्नानुसार,

$$\left(2\frac{3}{4}\Big/1\frac{5}{6}\right)\div\frac{7}{8}\times\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\frac{5}{7}+\frac{3}{4}\text{ of }\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow\frac{\frac{11}{4}}{\frac{11}{6}}\div\frac{7}{8}\times\frac{7}{8}\times\frac{7}{12}+\frac{3}{4}\times\frac{3}{7}$$

$$\Rightarrow\frac{3}{2}\times\frac{8}{7}\times\frac{7}{12}+\frac{5}{7}\times\frac{28}{9}$$

$$\Rightarrow1+\frac{20}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{29}{9}=3\frac{2}{9}\text{ Ans.}$$

वर्गान्तर तथा वर्गमूल आधारित

उदा.1 निम्नलिखित का मान है –

$$\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+\sqrt{49}}}}}\text{ is}$$

(a) 3 (b) 9 (c) 7 (d) 5

उत्तर (a)

हल

$$\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+\sqrt{29+7}}}}$$

$$=\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{19+6}}}$$

$$=\sqrt{5+\sqrt{11+\sqrt{25}}}$$