



UPSC – CSAT

सिविल सेवा परीक्षा

संघ लोक सेवा आयोग

भाग – 2

संख्यात्मक योग्यता

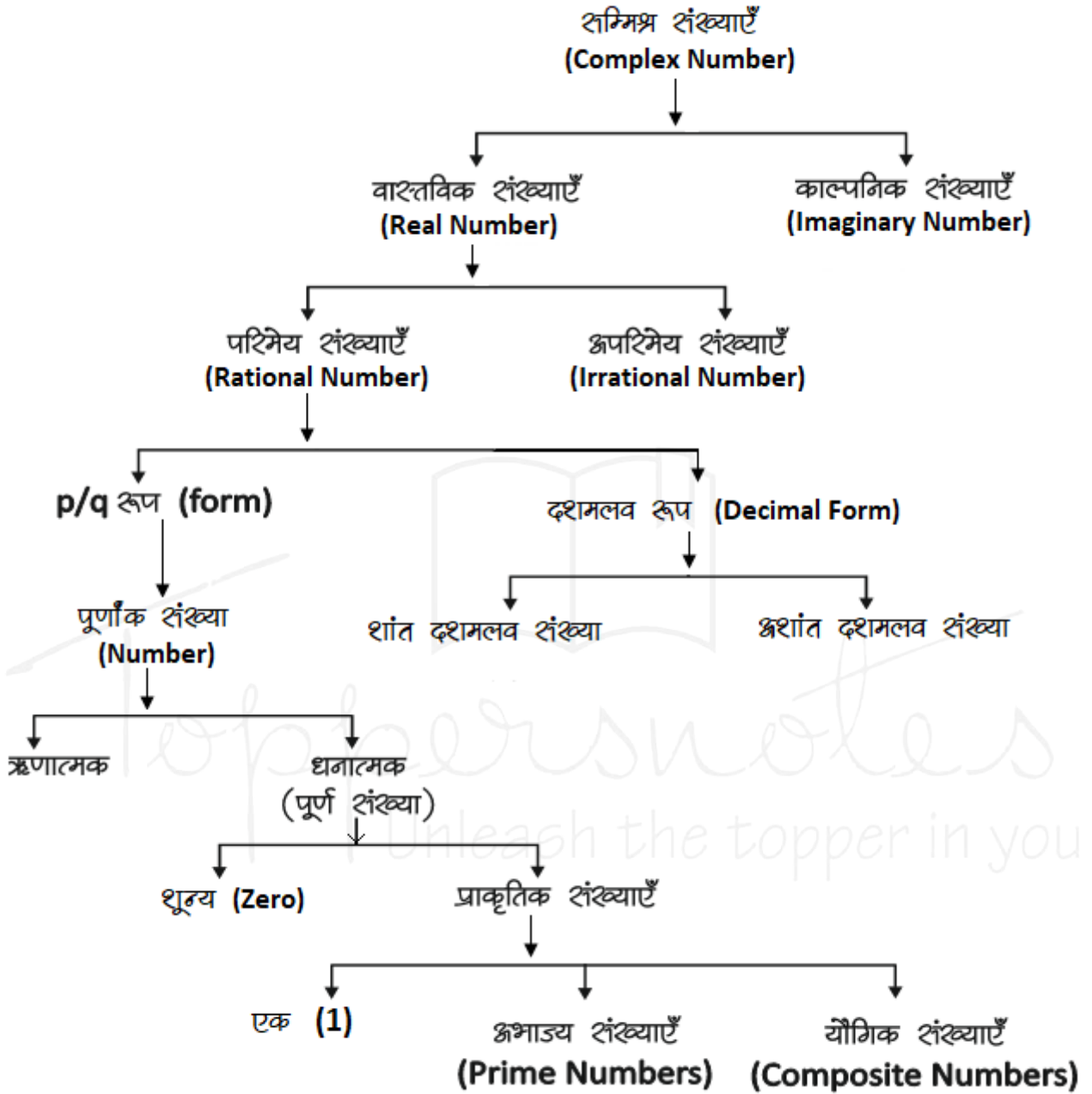
UPSC – CSAT (HINDI)

CONTENTS

संख्यात्मक योग्यता		
1.	प्रतिशतता	1
2.	लाभ-हानि	13
3.	साझेदारी	20
4.	औसत	25
5.	संख्या पद्धति	32
6.	परिमाण का क्रम	44
7.	सरलीकरण	47
8.	करणी व घातांक	59
9.	लघुत्तम समापवर्त्य व महत्तम समापवर्तक	73
10.	समय और कार्य	79
11.	पाईप और टंकी	86
12.	चाल, समय और दूरी	97
13.	नाव और धारा	104
14.	अनुपात एवं समानुपात	110
15.	मिश्रण एवं एलीगेशन	118
16.	साधारण ब्याज	124
17.	चक्रवृद्धि ब्याज	130
18.	क्रमचय व संचय	138

19.	प्राथिकता	147
20.	सांख्यिकी (केन्द्रीय प्रवृत्ति के माप)	161
21.	क्षेत्रमिति	171
22.	बीजगणित	190
23.	समुच्चय	204
24.	ज्यामिति	208

संख्या पद्धति (Number System)



सम्मिश्र संख्याएँ (Complex Number) (z)

$Z =$ वास्तविक संख्या + काल्पनिक संख्या

$$Z = a + ib$$

जहाँ a = वास्तविक संख्या

b = काल्पनिक संख्या

वास्तविक संख्याएँ

परिमेय एवं अपरिमेय संख्याओं को सम्मिलित रूप से वास्तविक संख्या कहते हैं। इन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित किया जा सकता है।

काल्पनिक संख्याएँ : जिन्हें संख्या रेखा पर प्रदर्शित नहीं किया जा सकता है।

पूर्णांक संख्याएँ : संख्याओं का ऐसा समुच्चय जिसमें पूर्ण संख्याओं के साथ-साथ ऋणात्मक संख्याएँ भी सम्मिलित हो, पूर्णांक संख्याएँ कहलाती हैं, इसे I से सूचित करते हैं।
 $I = \{-4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$

प्राकृत संख्याएँ : जिन संख्याओं का इस्तेमाल वस्तुओं को गिनने के लिए किया जाता है, प्राकृत संख्या कहते हैं।
 $N = \{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$

पूर्ण संख्याएँ : जब प्राकृत संख्याओं के परिवार में 0 को भी शामिल कर लेते हैं, तब वह पूर्ण संख्याएँ कहलाती हैं।
 $W = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
 चार लगातार प्राकृतिक संख्याओं का गुणनफल हमेशा 24 से पूर्णतः विभाज्य होता है।

सम संख्याएँ : संख्याएँ जो 2 से पूर्णतः विभाज्य हो सम संख्या कहलाती हैं।
 n वां पद = $2n$

प्रथम n सम संख्याओं का योग = $n(n+1)$

प्रथम n सम संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{2n(n+1)(2n+1)}{3}$

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद}}{2} \right\}$$

विषम संख्याएँ : वह संख्याएँ जो 2 से विभाजित न हो, विषम संख्याएँ होती हैं।
 प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$$\left\{ n = \frac{\text{अंतिम पद} + 1}{2} \right\}$$

प्राकृतिक संख्याएँ : प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं का योग = $\frac{n(n+1)}{2}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का योग = $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

प्रथम n प्राकृतिक संख्याओं के घनों का योग = $\left[\frac{n(n+1)}{2} \right]^2$

दो लगातार प्राकृतिक संख्याओं के वर्गों का अंतर उनके योगफल के बराबर होता है।

उदाहरण - $11^2 = 121$

$12^2 = 144$

$11 + 12 \rightarrow 23$ Difference $144 - 121 = 23$

अभाज्य संख्याएँ (Prime Numbers) - जिसके सिर्फ दो form हो- $1 \times$ संख्या

जैसे - $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, \dots\}$

जहाँ 1 Prime Number नहीं है ।

2 एकमात्र शम Prime संख्या है ।

3, 5, 7 क्रमागत विषम अभाज्य संख्या का इकलौता जोडा है ।

1 से 25 तक कुल अभाज्य संख्या = 9

25 से 50 तक कुल अभाज्य संख्या = 6

1-50 तक कुल 15 Prime Number है ।

51-100 तक कुल 10 Prime Number है ।

अतः 1-100 तक कुल 25 Prime Number है ।

1 से 200 तक कुल अभाज्य संख्या = 46

1 से 300 तक कुल अभाज्य संख्या = 62

1 से 400 तक कुल अभाज्य संख्या = 78

1 से 500 तक कुल अभाज्य संख्या = 95

सह अभाज्य संख्याएँ - वह संख्याएँ जिनका HCF सिर्फ 1 हो ।

उदाहरण - $(4, 9), (15, 22), (39, 40)$

HCF = 1

Perfect Number (परफेक्ट संख्या) - वह संख्या जिसके गुणनखण्डों का योग उस संख्या के बराबर हो (गुणनखण्डों में स्वयं उस संख्या को छोड़कर)

उदाहरण - $6 \rightarrow 1, 2, 3 \rightarrow$ यहाँ $1+2+3 \rightarrow 6$

$28 \rightarrow 1, 2, 4, 7, 14 \rightarrow 1+2+4+7+14 \rightarrow 28$

परिमेय (Rational) संख्याएँ - वह संख्याएँ जिन्हें P/Q form में लिखा जा सकता है, लेकिन Q जहाँ शून्य नहीं होना चाहिए, P व Q पूर्णांक होने चाहिए ।

उदाहरण - $2/3, 4/5, \frac{10}{-11}, \frac{7}{8}$

अपरिमेय (Irrational) संख्याएँ - इन्हें P/Q form में प्रदर्शित नहीं किया जा सकता ।

उदाहरण - $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \sqrt{11}, \sqrt{19}, \sqrt{26} \dots$

पूर्णवर्ग संख्या



Unit Digit जो वर्ग के हो सकते हैं

- 0
- 1
- 4
- 5 or 25
- 6
- 9

जो नहीं हो सकते

- 2 —
- 3 —
- 7 —
- 8 —

- किसी भी संख्या के वर्ग के अंतिम दो अंक वही होंगे जो 1-24 तक की संख्याओं के वर्ग के अंतिम दो अंक होंगे।

नोट - अतः सभी को 1-25 के वर्ग अवश्य याद होने चाहिए।

Binary व Decimal में बदलना

1. Decimal संख्या को Binary में बदलना

किसी दशमलव संख्या के समतुल्य Binary number ज्ञात करने के लिए हम प्रदत्त दशमलव संख्या को लगातार 2 से तब तक भाग देते हैं जब तक कि अंतिम भागफल के रूप में 1 प्राप्त नहीं होता है।

उदाहरण -

2	89	$2 \times 44 = 88 ; 89 - 88 = 1$
	44	$2 \times 22 = 44 ; 44 - 44 = 0$
	22	$2 \times 11 = 22 ; 22 - 22 = 0$
	11	$2 \times 5 = 10 ; 11 - 10 = 1$
	5	$2 \times 2 = 4 ; 5 - 4 = 1$
	2	$2 \times 1 = 2 ; 2 - 2 = 0$
	1	अंतिम भागफल

अतः 89 के समतुल्य Binary number = $(10111001)_2$

2. Binary को Decimal में बदलना

Binary system में 1 का मान जब वह हर बार अपनी बाईं ओर एक स्थान खिसकता है, स्वयं का दोगुना हो जाता है तथा जहाँ कहीं भी 0 आता है उसका मान 0 होता है।

उदाहरण -

1	0	1	1	0	0	1
2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0

Now

$$\begin{aligned}
 (10111001)_2 &= 1 \times 2^6 + 0 \times 2^5 + 1 \times 2^4 + 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0 \\
 &= 64 + 0 + 16 + 8 + 8 + 0 + 1 \{2^0 = 1\} \\
 &= 89
 \end{aligned}$$

भाजकों की संख्या या गुणनसंख्या की संख्या निकालना

पहले संख्या का अभाज्य गुणनखंड करेंगे और उसे Power के रूप में लिखेंगे तथा प्रत्येक (Power) घात में एक जोड़कर गुणा करेंगे तो भाजकों की संख्या प्राप्त हो जायेगी।

उदाहरण - 2280 को कुल कितनी संख्याओं से पूर्णतः भाग दिया जा सकता है।

हल - $2280 = 2^3 \times 3^1 \times 5^1 \times 19^1$
 भाजकों की संख्या = $(3+1)(1+1)(1+1)(1+1)$
 $= 4 \times 2 \times 2 \times 2 = 32$

इकाई का श्रंक ज्ञात करना

1. जब संख्या घात (power) के रूप में हो

जब Base का इकाई श्रंक 0, 1, 5 या 6 हो, तो कोई भी प्राकृतिक घात के लिए परिणाम का इकाई श्रंक वही रहेगा।

जब base का इकाई श्रंक 2, 3, 4, 7, 8, या 9 हो, तो Power में 4 से भाग देने और जितना शेष प्राप्त होगा उतना ही Base के इकाई श्रंक पर power रखेंगे। जब power, 4 से पूर्णतः कर जाता है तो base के इकाई श्रंक पर 4 power रखेंगे।

2. सरलीकरण के रूप में हो

प्रत्येक संख्या के इकाई के श्रंक को लिखकर चिन्ह के अनुसार सरल करेंगे जो परिणाम आयेगा उसका इकाई श्रंक उत्तर होगा।

Power वाली संख्याओं में भाग देना (भाजक निकालना)

1. यदि $a^n + b^n$ दिया हो तो

n विषम होने पर $(a+b)$ इसका भाजक होगा।

2. यदि $a^n - b^n$ दिया हो तो।

n विषम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$

n सम होने पर भाजक $\rightarrow (a-b)$ या $(a+b)$ या दोनों।

1. $a^n \div (a-1)$ हो, तो शेषफल हमेशा 1 बचेगा।

2. $a^n \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो हमेशा 1 बचेगा।

{ यदि n विषम हो, तो शेषफल a होगा

3. $(a^n + a) \div (a-1)$ हो, तो शेषफल 2 बचेगा

4. $(a^n + a) \div (a+1)$ { यदि n सम हो, तो शेषफल शून्य (0) होगा।

{ यदि n विषम हो, तो शेषफल $(a-1)$ होगा।

शांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद कुछ श्रंकों के बाद खत्म हो जाये जैसे - 0.25, 0.15, 0.375 इतने भिन्न संख्या में लिखा जा सकता है।

अंशांत दशमलव

वह संख्याएँ जो दशमलव के बाद चलते रहते हैं और ये दो तरह के हो सकते हैं ।

0.3333, 0.7777, 0.183183183.....

पुनरावृत्ति
Repeating

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती बल्कि पुनरावृत्ति करती हो, अंशत तक । इसे भिन्न में लिखा जा सकता है ।

Non
Repeating
Decimal

जो संख्याएँ दशमलव के बाद कभी खत्म नहीं होती पर ये अपनी संख्याओं की निश्चित पुनरावृत्ति (Repeat) नहीं करती ।

आवर्ती दशमलव भिन्न

वह दशमलव भिन्न दशमलव बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है तो बिंदु के बाद एक या अधिक अंकों की पुनरावृत्ति होती है ।

जैसे - $\frac{1}{3} = 0.333\dots$, $\frac{22}{7} = 3.14285714\dots$ ऐसी भिन्नों को व्यक्त करने के लिए दोहराए जाने वाले अंक के ऊपर एक रेखा खींच देते हैं ।

$$0.333\dots = 0.\overline{3}$$

$$\frac{22}{7} = 3.14285714\dots = 3.\overline{142857}$$

इसे बार बोलते हैं ।

- शुद्ध आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.\overline{p} = \frac{p}{9}$$

$$0.\overline{pq} = \frac{pq}{99}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr}{999}$$

- मिश्रित आवर्ती दशमलव भिन्न को निम्न प्रकार से साधारण भिन्न में बदले -

$$0.p\overline{q} = \frac{pq - p}{90}$$

$$0.pq\overline{r} = \frac{pqr - pq}{900}$$

$$0.\overline{pqr} = \frac{pqr - p}{990}$$

$$0.pq\overline{rs} = \frac{pqrs - pq}{9900}$$

उदाहरण - (i) $0.\overline{39} = \frac{39}{99} = \frac{13}{33}$

(ii) $0.6\overline{25} = \frac{625 - 6}{990} = \frac{619}{990}$

(iii) $0.35\overline{24} = \frac{3524 - 35}{9900} = \frac{3489}{9900} = \frac{1163}{3300}$

रोमन पद्धति के संकेतक

1	→	I	20	→	XX
2	→	II	30	→	XXX
3	→	III	40	→	XL
4	→	IV	50	→	L
5	→	V	100	→	C
6	→	VI	500	→	D
7	→	VII	1000	→	M
8	→	VIII			
9	→	IX			
10	→	X			

विभाजकता के नियम

2 से	अंतिम अंक 2म संख्या या शून्य (0) हो जैसे - 236, 150, 1000004
3 से	किसी संख्या में अंकों का योग 3 से विभाजित होगा तो पूर्ण संख्या 3 से विभाजित होगी। जैसे - 729, 12342, 5631
4 से	अंतिम दो अंक शून्य हो या 4 से विभाजित हो जैसे - 1024, 58764, 567800
5 से	अंतिम अंक शून्य या 5 हो जैसे - 3125, 625, 1250
6 से	कोई संख्या अगर 2 तथा 3 दोनों से विभाजित हो तो वह 6 से भी विभाजित होगी। जैसे - 3060, 42462, 10242
7 से	किसी संख्या के अंतिम अंक को 2 से गुणा करके शेष संख्या से घटाने पर यदि संख्या 0 या 7 का गुणज हो तो अथवा किसी भी अंक का 6 के गुणज में दोहराए तो संख्या 7 से विभाज्य होगी। जैसे - 222222, 44444444444, 7854
8 से	यदि किसी संख्या के अंतिम तीन अंक 8 से विभाज्य हो या अंतिम तीन अंक '000' (शून्य) हो। जैसे - 9872, 347000
9 से	किसी संख्या के अंकों का योग अगर 9 से विभाज्य हो तो पूर्ण संख्या 9 से विभाज्य होगी।
10 से	अंतिम अंक शून्य (0) हो तो
11 से	विषम स्थानों पर अंकों का योग व 2म स्थानों पर अंकों के योग का अंतर शून्य (0) या 11 या 11 का गुणज हो तो जैसे - 1331, 5643, 8172659
12 से	3 व 4 के विभाज्य का संयुक्त रूप
13 से	अंक का 6 बार दोहराए तो, या अंतिम अंक का 4 से गुणा करके शेष संख्या में जोड़ने पर संख्या अगर 13 से विभाजित हो तो पूर्ण संख्या 13 से विभाजित होगी। जैसे - 222222, 17784

उदाहरण

उदा.1 यदि किसी संख्या का $\frac{3}{4}$ उस संख्या के $\frac{1}{6}$ से 7 अधिक है, तो उस संख्या $\frac{5}{3}$ क्या होगा ?

- (a) 12 (b) 18 (c) 15 (d) 20

उत्तर (d)

हल माना कि संख्या = x

प्रश्नानुसार,

$$\Rightarrow \frac{9x - 2x}{12} = 7$$

$$\Rightarrow 7x = 7 \times 12$$

$$\Rightarrow x = 12$$

\Rightarrow संख्या का $\frac{5}{3}$ भाग

$$= \frac{x - 5}{3} \Rightarrow \frac{12 \times 5}{3} = 20$$

उदा.2 यदि दो संख्याओं का योगफल तथा उनका गुणनफल a तथा b , उनके व्युत्क्रमों का योगफल होगा

- (a) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ (b) $\frac{b}{a}$ (c) $\frac{a}{b}$ (d) $\frac{a}{ab}$

उत्तर (c)

हल माना दो संख्याएँ P तथा Q हैं।

$$P + Q = a$$

$$PQ = b$$

$$\frac{1}{P} + \frac{1}{Q} \Rightarrow \frac{Q + P}{PQ} = \frac{a}{b}$$

उदा.3 8 दो संख्याओं का योग 75 है और उनका अंतर 25 है, तो उन दोनों संख्याओं का गुणनफल क्या होगा ?

- (a) 1350 (b) 1250 (c) 1000 (d) 125

उत्तर (b)

हल माना बड़ी संख्या x तथा छोटी संख्या y हैं।

$$\therefore x + y = 75 \dots\dots\dots (i)$$

$$\text{तथा } x - y = 25 \dots\dots\dots (ii)$$

$2x = 100$ (समी. (i) एवं समी. (ii)) को जोड़ने पर

$$x = 50$$

x का मान समी. (i) में रखने पर

$$50 + y = 75$$

$$y = 75 - 50 = 25$$

अतः दोनों संख्याओं का गुणनफल = xy

$$= 50 \times 25 \Rightarrow 1250$$

$$\frac{abc}{bcd} = \frac{385}{1001} = \frac{5}{13}$$

सबसे बड़ी क्रमांक संख्या = 13

Trick:

प्रथम n विषम संख्याओं का योग = n^2

$$1 + 3 + 5 + \dots + 99 = ?$$

$$? = \left(\frac{99+1}{2} \right)^2 = 2500 \text{ उत्तर}$$

उदा.7 50 एवं 100 के बीच क्रमेण वाले सम संख्याओं का योग कितना होगा ?

हल $52 + 54 + 56 + \dots + 98$

$$= (2 + 4 + 6 + \dots + 98) - (2 + 4 + 6 + \dots + 50)$$

$$n = \frac{98}{2} = 49, n = \frac{50}{2} = 25$$

$$= 49 \times 50 = 2450, 25 \times 26 = 650$$

$$\therefore ? = 2450 - 650 = 1800 \text{ उत्तर}$$

उदा.8 50 एवं 100 के बीच क्रमेण वाले विषम संख्याओं का योग कितना होगा ?

हल: $51 + 53 + \dots + 99$

$$= (1 + 3 + 5 + \dots + 99) - (1 + 3 + 5 + \dots + 49)$$

$$= \frac{99+1}{2} = \frac{100}{2} = 50, \frac{49+1}{2} = \frac{50}{2} = 25$$

$$\therefore ? = (50)^2 - (25)^2$$

$$= 2500 - 625 = 1875 \text{ उत्तर}$$

उदा.9 विभाजन के एक योगफल में विभाजक, भागफल का 12 गुना तथा शेषफल का 5 गुना है । तदनुसार, यदि उसमें शेषफल 36 हो, तो भाज्य कितना होगा ?

(a) 2706

(b) 2796

(c) 2736

(d) 2826

उत्तर (c)

हल शेषफल = 36

$$\therefore \text{विभाजक} = 5 \times 36 = 180$$

$$\therefore \text{भागफल} = \frac{180}{12} = 15$$

$$\begin{aligned} \therefore \text{भाज्य} &= \text{विभाजक} \times \text{भागफल} + \text{शेषफल} \\ &= 180 \times 15 + 36 \\ &= 2700 + 36 \\ &= 2736 \text{ उत्तर} \end{aligned}$$

उदा.10 $(3694)^{1739} \times (615)^{317} \times (841)^{491}$ में इकाई शंक कितना है ?

- (a) 0 (b) 2
(c) 3 (d) 5

हल $(3694)^{1739}$ में इकाई शंक = $(4)^{1739}$ में इकाई शंक = $\{(4^2)^{896} \times 4\}$ में इकाई शंक
 $= (6 \times 4)$ में इकाई शंक = 4
 $(615)^{317}$ में इकाई शंक = $(5)^{317}$ में इकाई शंक = 5
 $(841)^{491}$ में इकाई शंक = $(1)^{491}$ में इकाई शंक = 1
 $5 \times 4 \times 1 = 20$ इकाई शंक = 0

उदा.11 $18.484848....$ को $\frac{p}{q}$ के रूप में निरूपित करने पर क्या लिखेंगे ?

- (a) $\frac{462}{25}$ (b) $\frac{610}{33}$
(c) $\frac{200}{11}$ (d) $\frac{609}{33}$

हल माना $x = 18.484848.....$ तब,
 $100x = 1848.484848.....$

घटाने पर, $99x = 1830 \Rightarrow x = \frac{1830}{99} = \frac{610}{33}$

अतः $18.484848.....$ का श्रेणीक रूप = $\frac{610}{33}$

उदा.12 $\frac{0.\overline{936} - 0.\overline{568}}{0.\overline{45} + 2.\overline{67}}$ को परिमेय संख्या के रूप में व्यक्त कीजिए ?

हल $0.\overline{936} = \frac{936}{999}, 0.\overline{568} = \frac{568}{999}$.

$\therefore (0.\overline{936} - 0.\overline{568}) = \left(\frac{936}{999} - \frac{568}{999}\right) = \frac{(936 - 568)}{999} = \frac{368}{999}$

$0.\overline{45} = \frac{45}{99}, 2.\overline{67} = 2 + 0.\overline{67} = 2 + \frac{67}{99} = \frac{198 + 67}{99} = \frac{265}{99}$

$\therefore (0.\overline{45} + 2.\overline{67}) = \left(\frac{45}{99} + \frac{265}{99}\right) = \frac{(45 + 265)}{99} = \frac{310}{99}$

दिया गया व्यंजक = $\left(\frac{\overset{184}{\cancel{368}}}{\underset{111}{\cancel{999}}} \times \frac{\overset{11}{\cancel{99}}}{\underset{155}{\cancel{310}}}\right) = \frac{2024}{17205}$

उदा.13 $\{(127)^{127} + (97)^{127}\}$ तथा $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$ का अभ्यनिष्ठ गुणनखण्ड क्या होगा ?

(a) 127

(b) 97

(c) 30

(d) 224

हल $(x^m + y^m)$ का एक गुणनखण्ड $(x + y)$ है यदि m विषम हो ।

$\therefore \{(127)^{127} + (97)^{127}\}$ का एक गुणनखण्ड $(127 + 97) = 224$ है ।

इसी प्रकार, $\{(127)^{97} + (97)^{97}\}$ का एक गुणनखण्ड $(127 + 97) = 224$ है ।

अतः दोनों का अभ्यनिष्ठ गुणनखण्ड 224 है ।

