Toppersnotes®
Unleash the topper in you

2nd – Grade

Mathematics

Senior Teacher

Rajasthan Public Service Commission

Paper - 2

Volume – 5

(Graduation Standard & Teaching Mathod)

SIERRA INNOVATIONS

2nd Grade

CONTENTS

Mathematics		
(Graduation Standard & Teaching Method) Volume - 5		
1.	**Differential Equations**	1
	• **Differential equation of first order and first degree**	3
	• **Homogenous differential equation**	7
	• **Linear differential equation**	9
	• **Clairaut's Equation**	33
2.	**Vector Calculus**	36
	• **Curl, Gradient and Divergence**	36
	• **Integral Theorems**	44
	• **Gauss Theorem**	46
	• **Stokes's Theorem**	47
	• **Green's Theorem**	47
3.	**Analytical Geometry of Three-Dimension**	49
	• **Sphere**	49
	• **Cone**	74
	• **Cylinder**	85
4.	**Statics & Dynamics**	98
	• **Coplanar Forces**	98
	• **Equilibrium of concurrent forces**	101
	• **Velocity and acceleration**	104

	• **Projectile**	110
	• **Simple linear motion under constant acceleration**	119
	• **Law of motion**	119
5.	**Linear Programming**	127
6.	**Numerical Analysis and Difference Equation**	181
Teaching Method		
Mathematics teaching		
1.	**The meaning, nature and logic of mathematics**	237
2.	**The importance of mathematics**	239
3.	**Language of Mathematics and Community Mathematics**	241
4.	**Teaching aids**	243
5.	**Mathematical teaching methods**	245
6.	**Teaching problems**	255
7.	**Measurement and evaluation**	256
8.	**Diagnostic and therapeutic teaching**	264
9.	**Meaning and importance of lesson plan and unit plan**	267
10.	**Relation of Mathematics to other subjects**	273
11.	**Academic and professional characteristics of a mathematics teacher**	276
12.	**Theory of Curriculum Development in Mathematics**	278
13.	**Indian mathematicians and their contributions**	282

Analytical Geometry of Three-Dimension

① गोला (sphere)
② शंकु (cone)
③ बेलन (cylinder)

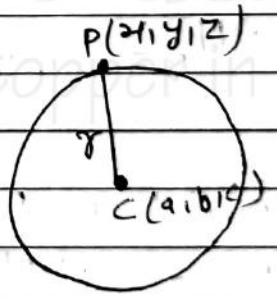
:- गोला (sphere) :-

गोला समष्टि में ऐसे बिन्दु का बिन्दुपथ है जिसकी स्थिर बिन्दु से दूरी अचर रहती है।

स्थिर बिन्दु – केन्द्र
अचर दूरी – त्रिज्या

गोले का समीकरण

① केन्द्रीय रूप (central form) :-



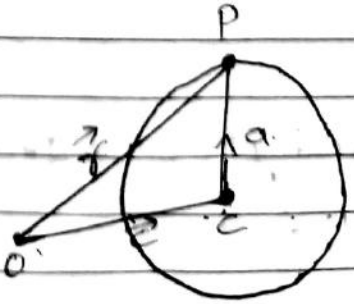
$CP = r$

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r$$

$$\boxed{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2}$$

उस गोले का समीकरण है जिसका केन्द्र (a,b,c) व त्रिज्या r है।

सदिश रूप :-



$|\vec{CP}| = \vec{r}$
$|\vec{r} - \vec{c}| = a$

$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}$

$\vec{c} = a\hat{i} + b\hat{j} + c\hat{k}$

$$|r - c| = a$$

जहाँ c केन्द्र का स्थिति सदिश है।

a = गोले की त्रिज्या

② व्यापक रूप :- (general form)

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2ux + 2vy + 2wz + d = 0$$

$$\Rightarrow x^2 + 2ux + u^2 + y^2 + 2vy + v^2 + z^2 + 2wz + w^2 = -d + u^2 + v^2 + w^2$$

$$\Rightarrow (x+u)^2 + (y+v)^2 + (z+w)^2 = \left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}\right)^2$$

केन्द्र $= (-u, -v, -w)$

त्रिज्या $r = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2 - d}$

Note :- ① केन्द्र व त्रिज्या ज्ञात करते समय x^2, y^2, z^2 का गुणांक 1 होना चाहिये।

② गोले के समी० में चार अज्ञात राशि है अतः गोले का समी० ज्ञात करने के लिये न्यूनतम चार प्रतिबंध होने चाहिये।

Qw $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 6z - 11 = 0$ का केन्द्र व त्रिज्या है।

Toppersnotes
Unleash the topper in you

Sol: $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

$2u=-2 \Rightarrow u=-1$

$2v=4 \Rightarrow v=2$

$2w=-6 \Rightarrow w=-3$

$d=-11$

केन्द्र $(-u,-v,-w) = (1,-2,3)$ Ans

त्रिज्या $= \sqrt{u^2+v^2+w^2-d} = \sqrt{1+4+9+11}$

$= \boxed{5}$ Ans

Que $7x^2+7y^2+7z^2-6x-3y-2z=0$ का केन्द्र व त्रिज्या है -

Sol: $x^2+y^2+z^2-\frac{6}{7}x-\frac{3}{7}y-\frac{2}{7}z=0$

$\because x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$

केन्द्र $\left(\frac{3}{7}, \frac{3}{14}, \frac{1}{7}\right)$

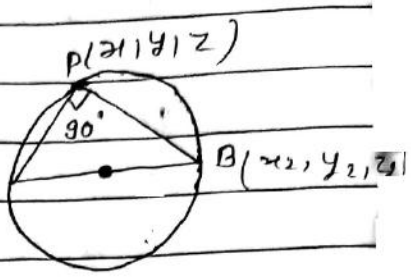
त्रिज्या $= \sqrt{\left(\frac{-3}{7}\right)^2+\left(\frac{-3}{14}\right)^2+\left(\frac{-1}{7}\right)^2}$

$= \sqrt{\frac{9}{49}+\frac{9}{196}+\frac{1}{49}}$

$= \boxed{\frac{1}{2}}$ Ans.

Toppersnotes
Unleash the topper in you

(3) व्यास रूप (Diameter form) :-



AP रेखा के दिक् अनुपात = $x-x_1, y-y_1, z-z_1$

BP रेखा के दिक् अनुपात = $x-x_2, y-y_2, z-z_2$

AP ⊥ BP तब लम्बवतता प्रतिबन्ध से -

$$a_1a_2+b_1b_2+c_1c_2=0$$

$$(x-x_1)(x-x_2)+(y-y_1)(y-y_2)+(z-z_1)(z-z_2)=0$$

जो कि उस गोले का समी० है जिसके व्यास के सिरे (x_1, y_1, z_1) व (x_2, y_2, z_2) हो।

Ques तथा $(0,0,c)$ से गुजरता $(0,0,0); (a,0,0); (0,b,0)$ है - उस गोले का समी० ज्ञात कीजिए।

Sol गोले का समी०

$$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0 \quad ---(1)$$

$(0,0,0) \Rightarrow d=0$

$(a,0,0) \Rightarrow a^2+2au+0=0$

$u=-\frac{a}{2}$

$(0,b,0) \Rightarrow b^2+2bv=0 \Rightarrow v=-b/2$

$(0,0,c) \Rightarrow c^2 + 2wc = 0$

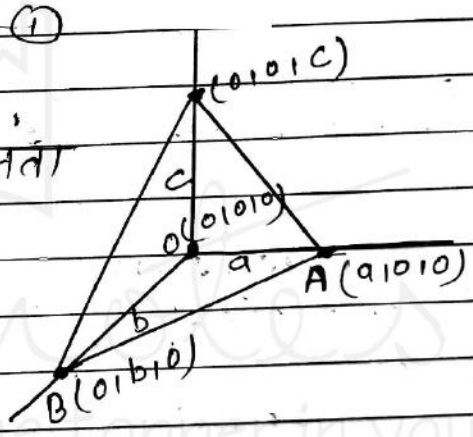
$cw = -c$

u, v, w के मान समी० (1) में रखने पर –

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0}$$ Ans.

Qu. समतल $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ निर्देशी अक्षों को A, B, C पर मिलता है तब गोले $OABC$ का समी० है –

Sol: $\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$ ---- (1)



समतल (1) x-अक्ष को A पर मिलता है।

तब $y=0, z=0$ तब $x=a$

$A(a,0,0)$

इसी प्रकार $B(0,b,0)$

$C(0,0,c)$

तथा तब गोले $OABC$ का समी०

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0}$$ Ans.

Qu. समतल $2x-3y+z=6$ निर्देशी अक्षों पर मिलता है तब गोले A, B, C का $OABC$ का समी० है –

Toppersnotes
Unleash the topper in you

(A) $2x-3y+z=6$ — (1)

समतल (1) x- अक्ष को A पर मिलता है -

तब A पर $y=0, z=0$

$2x=6 \Rightarrow x=3$

B पर $x=0, z=0$

$-3y=6$

$y=-2$

C पर $x=0, y=0$

$z=6$

अतः $A(3,0,0)$

$B=(0,-2,0)$

$C=(0,0,6)$

तब गोले OABC का समी०-

$$\boxed{x^2+y^2+z^2-3x+2y-6z=0}$$ Ans.

Que. अक्षों पर त्रिज्या k का गोला मूल बिन्दु से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को पर मिलता है तब ΔABC के केन्द्रक का A, B, C बिन्दुपथ है-

Sol. $O(0,0,0)$

$A(a,0,0), B(0,b,0), C(0,0,c)$

तब गोले का समी०

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz=0$ ----- (1)

प्रश्नानुसार

गोले की त्रिज्या $=k$

$u=-\frac{a}{2}, v=-\frac{b}{2}, w=-\frac{c}{2}$ $\quad d=d$

$$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}-0}=k$$

$a^2+b^2+c^2 = 4k^2$ ---- (2)

ΔABC का केन्द्रक (f,g,h) है।

तब $f = \frac{a+0+0}{3}$, $g = \frac{0+b+0}{3}$, $h = \frac{0+0+c}{3}$

$f = \frac{a}{3}$, $g = \frac{b}{3}$, $h = \frac{c}{3}$

$a = 3f$, $b = 3g$, $c = 3h$

a,b,c का मान समी० (2) में रखने पर

$9f^2+9g^2+9h^2 = 4k^2$

(f,g,h) का बिन्दुपथ $\boxed{9(x^2+y^2+z^2) = 4k^2}$ Ans.

RAS 2013 Que: अचर त्रिज्या $2k$ का गोला मूल बिन्दु से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को A, B, C पर मिलता है तब चतुष्फलक $OABC$ के केन्द्रक का बिन्दुपथ है-

Sol: $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

तब गोले $OABC$ का समी०

$x^2+y^2+z^2-ax-by-cz = 0$ --- (1)

गोले की त्रिज्या $= 2k$

$\sqrt{\frac{a^2}{4}+\frac{b^2}{4}+\frac{c^2}{4}} = 2k$

$a^2+b^2+c^2 = 16k^2$ ---- (2)

चतुष्फलक OABC का केन्द्रक (f, g, h) है

तब $f = \frac{0+a+0+0}{4}$, $g = \frac{b}{4}$, $h = \frac{c}{4}$

$a = 4f$, $b = 4g$, $c = 4h$

का मान समी० (2) में रखने पर -

a, b, c

$16f^2 + 16g^2 + 16h^2 = 16k^2$

(f, g, h) का बिन्दुपथ $\boxed{x^2 + y^2 + z^2 = k^2}$ Ans.

Que गोले के केन्द्र का बिन्दुपथ जो मूल बिन्दु से गुजरता है तथा निर्देशी अक्षों को A, B, C पर मिलता है ताकि चतुष्फलक OABC का आयतन अचर रहे।

Sol° $O(0,0,0)$, $A(a,0,0)$, $B(0,b,0)$, $C(0,0,c)$

तब गोले OABC का समी०

$x^2 + y^2 + z^2 - ax - by - cz = 0$ ---- (1)

गोले (1) का केन्द्र (f, g, h) है तब -

$\because (-u, -v, w)$

$f = \frac{a}{2}$, $g = \frac{b}{2}$, $h = \frac{c}{2}$

$a = 2f$, $b = 2g$, $c = 2h$ ---- (2)

चतुष्फलक OABC का आयतन = अचर

$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & z_2 & 1 \\ x_3 & y_3 & z_3 & 1 \\ x_4 & y_4 & z_4 & 1 \end{vmatrix}$ = अचर

$\frac{1}{6}\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ a & 0 & 0 & 1 \\ 0 & b & 0 & 1 \\ 0 & 0 & c & 1 \end{vmatrix}$ = अचर

$0+0+1 \begin{vmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix}$ = अचर

abc = अचर

a, b, c का मान समी (2) से -

$2f \cdot 2g \cdot 2h =$ अचर

fgh = अचर

(f, g, h) का बिन्दुपथ $\boxed{xyz = \text{अचर}}$ Ans.

Q. Imp

Ques. बिन्दु (1,0,0), (0,1,0), (0,0,1) से गुजरने वाली गोले का समी० जिसकी त्रिज्या न्यूनतम हो -

Sol. व्यापक रूप में गोले का समी० -

$x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$ --(1)

$(1,0,0) \Rightarrow 1+2u+d=0$

$u = \frac{-d+1}{2}$

$(0,1,0) \Rightarrow 1+2v+d \Rightarrow v = \frac{-d+1}{2}$

$(0,0,1) \Rightarrow 1+2w+d \Rightarrow w = \frac{-d+1}{2}$

गोले की त्रिज्या

$r = \sqrt{u^2+v^2+w^2-d}$

$r^2 = u^2+v^2+w^2-d \Rightarrow r^2 = \frac{1}{4}(d+1)^2+\frac{1}{4}(d+1)^2+\frac{1}{4}(d+1)^2-d$

$r^2 = \frac{3(d+1)^2}{4}-d \quad ----(2)$

$f(d) = \frac{3}{4}(d+1)^2-d$

$f'(d) = \frac{2\cdot 3}{4_2}(d+1)-1 \Rightarrow \frac{3}{2}(d+1)-1$

$f'(d) = 0$

$\frac{3}{2}(d+1)-1 = 0$

$d = -\frac{1}{3}$

$f''(d) = \frac{3}{2}$

$f''(-\frac{1}{3}) = \frac{3}{2} > 0$ $\boxed{d = -\frac{1}{3}}$ निम्निष्ठ बिन्दु है।

अतः $\boxed{d = -\frac{1}{3}}$ पर त्रिज्या न्यूनतम है।

Ans.

$d = -\frac{1}{3}$ पर

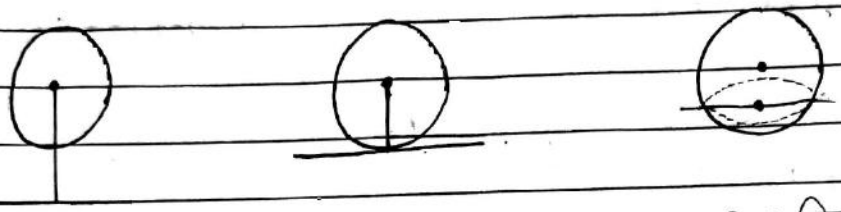
$u = v = w = -\frac{1}{2}(-\frac{1}{3}+1) = -\frac{1}{3}$

अतः गोले का समी० ① से -

$$x^2+y^2+z^2-\frac{1}{3}(2x+2y+2z+1)=0$$

$$\boxed{3x^2+3y^2+3z^2-2x-2y-2z-1=0}$$ Ans

गोला व समतल :-



P > त्रिज्या P = r P < त्रिज्या

गोले के केन्द्र से समतल पर लम्ब की लम्बाई P ज्ञात करते है।

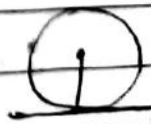
तब (i) गोला समतल को स्पर्श करता है यदि $\boxed{P = \text{त्रिज्या}}$

(ii) समतल गोले को वृत में प्रतिच्छेद करता है।
यदि $\boxed{P < \text{त्रिज्या}}$

(iii) समतल व गोला अलग-2 होंगे यदि $\boxed{P > \text{त्रिज्या}}$

① समतल द्वारा गोले को स्पर्श करने का प्रतिबन्ध :-

गोले के केन्द्र से समतल पर लंब की लम्बाई = गोले की त्रिज्या



Qw समतल $2x-y+4z+\lambda=0$ ⓐ गोले $x^2+y^2+z^2+2x-4y+6z-7=0$ को स्पर्श करता है तब $\lambda=?$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

Ans. गोले का केन्द्र $= (-1, 2, -3)$

त्रिज्या $r = \sqrt{1+4+9+7} = \sqrt{21}$

स्पर्श प्रतिबन्ध केन्द्र से समतल ① पर लम्ब की लम्बाई = त्रिज्या $(-1, 2, -3)$

$\because (x_1, y_1, z_1)$ $\quad \because P = \left|\frac{ax_1+by_1+cz_1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}\right|$

$ax+by+cz+d=0$

$$\left|\frac{2(-1)-2+4(-3)+\lambda}{\sqrt{4+1+16}}\right| = \sqrt{21}$$

$$|\lambda-16| = 21 \Rightarrow \lambda-16 = \pm 21$$

$$\lambda = 16 \pm 21$$

$$\boxed{\lambda = 37, -5} \quad \text{Ans.}$$

Que उस गोले का समी० जिसका केन्द्र बिन्दु $3\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k}$ पर है तथा समतल $\vec{r}(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}) = 10$ को स्पर्श करता है -

Sol: केन्द्र $= 3\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k} = (3, 6, -4)$

समतल $\vec{r}\cdot(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}) = 10 \quad \because \vec{r}\cdot\vec{n} = d$

$(x\hat{i}+y\hat{j}+z\hat{k})\cdot(2\hat{i}-2\hat{j}-\hat{k}) = 10$

$$2x-2y-z = 10 \quad \text{---} ①$$

चूंकि गोला समतल ① को स्पर्श करता है अतः गोले की त्रिज्या = केन्द्र से समतल ① पर लम्ब की लम्बाई $(3, 6, -4)$

$$\Rightarrow \left|\frac{2\times3-2\times6+4-10}{\sqrt{4+4+1}}\right| = 4$$

गोले का समी०

$$|r-c| = a$$

$$\boxed{|r-(3\hat{i}+6\hat{j}-4\hat{k})| = 4}$$ Ans.

1st grade का प्रश्न गोले $x^2+y^2+z^2 = r^2$ का कोई स्पर्श समतल निर्देशी अक्षों पर a, b, c अन्तः खण्ड काटता है तब सत्य है –

① $a^{-1}+b^{-1}+c^{-1} = r^{-1}$

② $a^{-2}+b^{-2}+c^{-2} = r^{-2}$

समतल का समी०

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c} = 1 \quad \text{----①}$$

समतल ① गोले $x^2+y^2+z^2 = r^2$ का स्पर्श समतल हो तो

गोले के केन्द्र $(0,0,0)$ से समतल ① पर लम्ब की ल० = त्रिज्या

$$\left|\frac{0+0+0-1}{\sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}}\right| = r$$

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}}$$

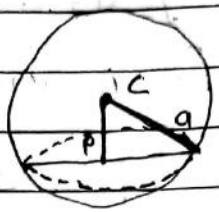
$$\frac{1}{r^2} = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}$$

$$\boxed{r^{-2} = a^{-2}+b^{-2}+c^{-2}}$$ Ans.

Toppersnotes
Unleash the topper in you

#① गोले का समतलीय परिच्छेद (plane section of Sphere)

*गोले का समतलीय परिच्छेद (वृत) होता है।



वृत की त्रिज्या $x = \sqrt{a^2 - p^2}$

जहाँ a = गोले की त्रिज्या
P = गोले के केन्द्र से समतल पर लम्ब की लम्बाई

वृत का केन्द्र = गोले के केन्द्र से समतल पर डाले गये लम्ब ~~की लम्बाई~~ का लम्बपाद

Note :- गोले व समतल का संयुक्त समी० (वृत) को व्यक्त करता है।

ex :- $x^2+y^2+z^2+2ux+2vy+2wz+d=0$, $lx+my+nz=p$ वृत को व्यक्त करता है।

Qu वृत $x^2+y^2+z^2-2y-4z-20=0$ (1), $x+2y+2z-15=0$ (2) की त्रिज्या है-

Sol: गोले (1) का केन्द्र = $(0,1,2)$

त्रिज्या $a = \sqrt{0+1+4+20} = 5$

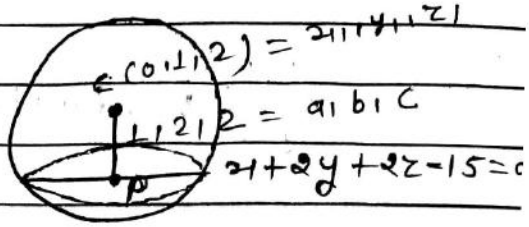
$P =$ केन्द्र $(0,1,2)$ से समतल (2) पर लम्ब की लम्बाई

$= \left| \frac{0+2+4-15}{\sqrt{1+4+4}} \right| = \frac{9}{3} = 3$

अतः वृत की त्रिज्या $= \sqrt{q^2 - p^2}$

$= \sqrt{25 - 9} = (4)$ Ans.

वृत का केन्द्र :-



रेखा का समी०

CP

$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$

$\frac{x - 0}{1} = \frac{y - 1}{2} = \frac{z - 2}{2} = r$ (माना)

रेखा पर बिन्दु $x = r, \; y = 2r + 1, \; z = 2r + 2$

यदि यह बिन्दु लम्बपाद हो तो समतल (2) पर स्थित होता है।

$r + 2(2r + 1) + 2(2r + 2) - 15 = 0$

$\boxed{r = 1}$ अतः लम्बपाद = वृत का केन्द्र

$= (1, 3, 4)$

Que समतल $x + 2y + 2z + 7 = 0$ द्वारा गोले $x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 2y - 4z - 19 = 0$ पर काटे गये वृत की त्रिज्या ज्ञात करें।

Sol: केन्द्र $= (-1, 1, 2)$

त्रिज्या $= \sqrt{1 + 1 + 4 + 19} = 5$

(Ans)