



उ.प्र. शिक्षक पात्रता परीक्षा

उच्च प्राथमिक स्तर (विज्ञान वर्ग)

भाग-3

गणित



विषय सूची

1. संख्या पद्धति (Number System)	1
2. बीजगणितीय तदात्म्य (Algebraic Identities)	10
3. साधारण ब्याज (Simple Interest)	26
4. चक्रवृद्धि ब्याज (Comound Interest)	33
5. लघुत्तम समापवर्तक एवं महत्तम समापवर्तक (L.C.M + H.C.F.)	42
6. घातांक एवं कश्पी (Indices and surds)	51
7. श्लीकरण (Simplification)	79
8. बहुपद (Polynomiols)	90
9. सांख्यिकी (Statistics)	99
10. प्रतिशतता (Percentage)	104
11. अनुपात एवं समानुपात (Ratio and Proportion)	118
12. समय एवं कार्य (Time and Work)	123
13. ज्यामितीय (Geometry)	133
14. निर्देशांक ज्यामिति (Coordinate Geometry)	159
15. लाभ-हानि एवं बट्टा (Profit loss and Discount)	167
16. समय, दूरी और रेलगाडी (Time, Distance and train)	188
17. प्रायिकता (Probability)	198
18. क्षेत्रमिति (Mensuration)	209
19. समीकरण (युगपत, वर्ग, रैखिक, चर-अचर)	256
20. गणित की अध्यापन विधि (Teaching methods of Mathematics)	266

सरलीकरण
Simplification

कुछ विशेष सूत्र

- (i) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- (ii) $(a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$
- (iii) $(a+b)^2 + (a-b)^2 = 2(a^2 + b^2)$
- (iv) $(a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$
- (v) $(a^2 + b^2) = (a+b)(a-b)$
- (vi) $(a+b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a+b)$
- (vii) $(a-b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a-b)$
- (viii) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$
- (ix) $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & 6704 \times 706 + 6704 \times 214 = ? \\
 & = 6704 \times (706 + 214) \\
 & = 6704 \times 1000 = \boxed{6704000}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & 0765 \times 974 - 0765 \times 074 = ? \\
 & = 0765 \times (974 - 074) \\
 & = 0765 \times 100 = \boxed{076500}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad & 1509 \times 1509 = ? \\
 & (1509)^2 = (1500 + 9)^2 \\
 & = (1500)^2 + (9)^2 + 2 \times 1500 \times 9 \quad [\because (a+b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab] \\
 & = 2250000 + 81 + 27000 \\
 & = \boxed{2277081}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{4} \quad & 1994 \times 1994 = ? \\
 & (2000 - 6)^2 = \\
 & = (2000)^2 + 6^2 - 2 \times 2000 \times 6 \quad [\because (a-b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab] \\
 & = 4000000 + 36 - 24000 \\
 & = 4000000 + 36 - 24000 = 4000036 - 24000 \\
 & = \boxed{3976036}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{5} \quad & 003 \times 003 - 117 \times 117 = ? \\
 & = (003)^2 - (117)^2 \quad [a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)] \\
 & = (003 + 117) (003 - 117) \\
 & = 1000 \times 766 = \boxed{766000}
 \end{aligned}$$

$$\textcircled{6} \quad \frac{703 \times 703 \times 703 + 217 \times 217 \times 217}{703 \times 703 - 703 \times 217 + 217 \times 217} = ?$$

दिया - दिया गया व्यंजक = $\frac{(703)^3 + (217)^3}{(703)^2 - 703 \times 217 + (217)^2}$

$$= \frac{(a^3 + b^3)}{(a^2 - ab + b^2)} \quad , \quad \text{जहाँ } a = 703$$

तथा $b = 217$

$$= \frac{(a+b)(a^2 + b^2 - ab)}{(a^2 - ab + b^2)}$$

$$\Rightarrow (a+b) = (703 + 217) = \boxed{1000}$$

$$\textcircled{7} \quad \frac{693 \times 693 \times 693 - 303 \times 303 \times 303}{693 \times 693 + 693 \times 303 + 303 \times 303} = ?$$

दिया - दिया गया व्यंजक = $\frac{(693)^3 - (303)^3}{(693)^2 + (303)^2 + (693 \times 303)}$

$$= \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2 + (ab)}$$

$$= \frac{(a-b)(a^2 + b^2 + ab)}{(a^2 + b^2 + ab)}$$

$$= (a-b)$$

$$= 693 - 303$$

$$= \boxed{390}$$

संख्या 536407 में निम्न अंकों के जातीय मान लिखिये?

- (i) 5 (ii) 4 (iii) 0.

5 का जातीय मान = 5

4 का जातीय मान = 4

0 का जातीय मान = 0

विभक्ति 3 - नियम

\overline{xxx} संख्याओं में भाग संक्रिया (Division on numbers) \overline{xxx}

मान किसी संख्या a को संख्या b से विभक्त करने पर भागफल q तथा शेषफल r है तब -

a = भाज्य (dividend)

b = भाजक (divisor)

q = भागफल (quotient)

r = शेषफल (remainder)

$$b \overline{) a \quad } q$$

$$\underline{\quad \quad \quad}$$

$$r$$

$$\text{भाज्य} = (\text{भाजक} \times \text{भागफल}) + \text{शेषफल}$$

विभक्त होने के नियम →

2 से - यदि किसी सं० का अंक 0, 2, 4, 6, 8 हो, तो वह सं० 2 से पूर्णतया विभक्त होगी

3 से - यदि किसी सं० के सभी अंकों का योग 3 से पूर्णतया विभक्त हो जाये

4 से - यदि किसी सं० के अन्तिम दो अंक 4 से पूर्णतया विभक्त हों।

5 से - यदि किसी सं० के किसी का अंक 5 अथवा 0 हो।

6 से - यदि किसी सं० 2 और 3 दोनों से पूर्णतया विभक्त हो।

7 से - यदि किसी अंक जो छोड़कर शेष बची सं० में से किसी का दुगुना घटा देने पर बची सं० 7 से विभक्त हो तो किसी सं० 7 से विभक्त होगी।

8 से - यदि किसी सं० के अन्तिम तीन अंक 8 से पूर्णतया विभक्त हों।

9 से - यदि किसी सं० के सभी अंकों का योग 9 से पूर्णतया विभक्त हो।

10 से - यदि किसी सं० का अन्तिम अंक शून्य हो।

11 से - कोई भी सं० 11 से विभाजित होगी यदि उसके सम स्थान के अंकों का योग का अन्तर या तो 0 हो या 11 से विभाजित हो।

① 1043 को किसी संख्या से भाग देने पर भागफल 11 तथा शेषफल 20 प्राप्त होता है। भाजक ज्ञात कीजिये ?

दिया \Rightarrow

$$\begin{aligned} \text{दिव्य} &= 1043 \\ \text{भागफल} &= 11 \\ \text{शेषफल} &= 20 \end{aligned}$$

$$\text{भाजक} = \frac{(\text{दिव्य}) - (\text{शेषफल})}{\text{भागफल}} = \frac{1043 - 20}{11} = \frac{1023}{11} = \boxed{93}$$

② 1000 में दोरी से दोरी संख्या जोन-सी धराई जाये कि शेष बची संख्या 19 से पूर्णतया विभक्त हो जाये ?

दिया. 1000 को 19 से भाग देने पर शेषफल = 12

$$19 \overline{) 1000} \quad (52 \quad \boxed{\text{अधिकतम संख्या} = 12}$$

$$\begin{array}{r} 95 \\ \underline{50} \\ 30 \\ \underline{12} \end{array}$$

③ किसी सं० को 195 से भाग देने पर 47 शेषफल है इस सं० को 15 से भाग देने पर

शेष क्या बचेगा ?

दिया- माना की गई संख्या को भाग देने पर भागफल = 9
तथा शेषफल = 47

$$\begin{aligned} \text{तब की गई संख्या} &= 195 \times 9 + 47 \\ &= 15 \times (139) + 15 \times 3 + 2 \\ &= 15 \times (139 + 3) + 2 \end{aligned}$$

अतः इस सं० को 15 से भाग देने पर
भागफल = 2

⑩ $(6 \times 8 \times 9 \times 2)$ में इकाई का अंग क्या होगा ?

हल → दी गई संख्याओं के इकाई अंकों का गुणनफल =
 $(6 \times 8 \times 9 \times 2) = 864$

अतः अभीष्ट अंक = 4

⑪ $(3527)^{654}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

हल → अभीष्ट अंक $(7)^{654}$ में इकाई अंक

$$= [(7^4)^{163} \times 7^2] \text{ में इकाई अंक}$$

$$= [1 \times 9] \text{ में इकाई अंक} = 9 = 9$$

∴ $(3527)^{654}$ में इकाई अंक = 9.

⑫ $(765 \times 64 \times 357)$ में इकाई अंक क्या है ?

$$765 \text{ का इकाई अंक} = (7^4)^6 \times 7 \text{ का इकाई अंक} = (1 \times 7) = 7$$

$$64 \text{ का इकाई अंक} = 6$$

$$357 \text{ का इकाई अंक} = (3^4)^1 \times 3 \text{ का इकाई अंक} = (1 \times 3) = 3$$

$$\text{अभीष्ट अंक} = (7 \times 6 \times 3) \text{ का इकाई अंक} = 126 \text{ का इकाई अंक} = 6$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{1} \quad & \left(1\frac{1}{2} + 11\frac{1}{2} + 111\frac{1}{2} + 1111\frac{1}{2} \right) = ? \\
 & = \left(1 + \frac{1}{2} + 11 + \frac{1}{2} + 111 + \frac{1}{2} + 1111 + \frac{1}{2} \right) \\
 & = \left(1 + 11 + 111 + 1111 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \right) \\
 & = (1234 + 1 + 1) \\
 & = \boxed{1236} \text{ any}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{2} \quad & \left[\frac{1}{1 \times 2} + \frac{1}{2 \times 3} + \frac{1}{3 \times 4} + \dots + \frac{1}{99 \times 100} \right] = ? \\
 & \left[1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{99} - \frac{1}{100} \right] \\
 & \left[1 - \frac{1}{100} \right] \\
 & \text{any } \left[\frac{99}{100} \right]
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \textcircled{3} \quad & \left(1 - \frac{1}{2^2} \right) \left(1 - \frac{1}{3^2} \right) \left(1 - \frac{1}{4^2} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{19^2} \right) \left(1 - \frac{1}{20^2} \right) = ? \\
 & \left(1 - \frac{1}{2} \right) \left(1 + \frac{1}{2} \right) \left(1 - \frac{1}{3} \right) \left(1 + \frac{1}{3} \right) \left(1 - \frac{1}{4} \right) \left(1 + \frac{1}{4} \right) \dots \left(1 - \frac{1}{19} \right) \left(1 + \frac{1}{19} \right) \left(1 - \frac{1}{20} \right) \left(1 + \frac{1}{20} \right) \\
 & \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} \times \frac{3}{4} \times \frac{5}{4} \dots \frac{18}{19} \times \frac{20}{19} \times \frac{19}{20} \times \frac{21}{20} \\
 & = \frac{1}{2} \times \frac{21}{20} \\
 & = \frac{21}{40} = \boxed{0.525}
 \end{aligned}$$

Exercise

① $25 \times 3.25 + 50.4 \div 24 = ?$

ans = 83.35

② $7690 + 2956 - 8050 + 4020 = ?$

ans = 6094

③ $16 \times 12 - 672 \div 21 = x - 211$

ans = 371

④ $32.5 \times 450 + 26.10 \div 3 - 745.5 = ?$

ans = 522

⑤ $(106 \times 106 - 94 \times 94) = ?$

ans = 2400

⑥ $(207 \times 207 + 269 \times 269 - 2 \times 207 \times 269) = ?$

ans = 324

⑦ $(456 \times 456 + 144 \times 144 + 2 \times 456 \times 144) = ?$

ans = 360000

⑧ $\frac{(509 + 107)^2 - (507 - 107)^2}{509 \times 107} = ?$

ans = 4

⑨ $\frac{(931 + 130)^2 + (931 - 130)^2}{(931 \times 931) + (130 \times 130)} = ?$

ans = 2

⑩ $\frac{(735 \times 735 \times 735 - 105 \times 105 \times 105)}{(735 \times 735 + 735 \times 105 + 105 \times 105)} = ?$

$(735 \times 735 + 735 \times 105 + 105 \times 105)$

ans = 1100

Q(11) $(2137)^{753}$ का इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 7

Q(12) $(22)^{23}$ का इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 8

Q(13) $(3694)^{1793} \times (615)^{317} \times (844)^{491}$ में इकाई अंक क्या होगा ?

ans = 0

Q(14) 867943 में 7 के स्थानीय मान तथा जातीय मान में अन्तर =

ans = 6993

Q(15) 689235 में 9 तथा 3 के स्थानीय मानों का अन्तर कितना है =

ans = 8970

Q(16) सबसे छोटी अभाज्य संख्या जौन सी है ?

ans = 2

Q(17) 40 से छोटी अभाज्य संख्याएँ कितनी हैं ?

ans = 10

Sol :-

बहुपद (Polynomials)

बहुपद (Polynomials)

बहुपद \rightarrow (Polynomials) $\Rightarrow P(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$ के रूप में अभिव्यक्त फलन $f(x)$ को, जहाँ $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n$ वास्तविक संख्याएँ हैं $a_n \neq 0$ एवं n एक ऋणोत्तर पूर्णांक है।
 वास्तविक संख्याओं पर पर (Variable) x में बहुपद कहा जाता है।
 वास्तविक संख्याओं a_0, a_1, \dots, a_n को बहुपद का गुणांक कहते हैं।

उ० - $7x^2 - 5x + 3$ पूर्णांको पर बहुपद है।

$\frac{3}{4}x^3 - \frac{4}{5}x^2 + 3x - 5$ परिमेय संख्याओं पर बहुपद है।

साधारणतः बहुपद को या तो x के घातो के आरोही या x के घातो के आरोही क्रम में लिखा जाता है।

उ० - $5x^2 - 7x^2 - 2x - 5$ मानक रूप में है जहाँ x के घातो को आरोही क्रम में लिखा गया है।

और बहुपद $3 - 3y - 6y^2 + 5y^3$ भी मानक रूप है जहाँ y के घातो को आरोही क्रम में लिखा गया है।

- ① 'जब बहुपद $f(x) = x^4 + 2x^3 - 3x^2 + x - 1$ को $(x-2)$ से विभाजित किया जाये तो शेषफल क्या होगा ?
- ② जब $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 56$ को $(x+3)$ से विभाजित किया जाये तो शेषफल क्या होगा ?
- ③ जब बहुपद $f(x) = 4x^3 - 12x^2 + 14x - 3$ को $2x-1$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल ज्ञात कीजिए ?
- ④ यदि बहुपद $2x^3 + ax^2 + 3x - 5$ एवं $x^3 + x^2 - 2x + 9$ को $(x-2)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल समान होता है।
 a का मान क्या होगा ?
- ⑤ यदि बहुपद $f(x) = x^4 - 2x^3 + 3x^2 - ax + b$ को $(x+1)$ एवं $(x+1)$ से विभाजित किया जाता है तो शेषफल क्रमशः 5 एवं 19 प्राप्त होते हैं। a एवं b का मान है।
- ⑥ बहुपद $f(x) = x^3 + x^2 - 7x + 15$ का एक गुणनखण्ड है ?
- ⑦ a के किस मान के लिये $(x-a)$ बहुपद $f(x) = x^5 - a^2x^3 + 2x + a+6$ का एक गुणनखण्ड है ?
- ⑧ a के किस मान के लिये $(x+a)$ बहुपद $f(x) = x^5 - a^2x^3 + 2x + a-3$ का एक गुणनखण्ड है ?

- 9) k के किस मान के लिये बहुपद $(2x^4 + 3x^3 + 2kx^2 + 3x + 6)$ $x+2$ द्वारा पूर्णतः विभाजित है ?
- 10) a एवं b के किस मान के लिये $(x^3 - 10x^2 + ax + b), (x-1)$ एवं $(x-2)$ से पूर्णतः विभाज्य है ?
- 11) x^3-1, x^4+x^2+1 और x^4-5x^2+4 का लघुसदपद क्या होगा ?
- 12) x^2-1, x^2+4x+3 और x^2-3x+2 का लघुसदपद क्या होगा ?
- 13) $x^2-x-12, x^2-7x+12, 2x^2-11x+15$ का मसदपद क्या होगा ?
- 14) दो द्विघाती व्यंजकों का लघुसद और मसद क्रमशः x^3-7x+6 और $x-1$ हैं तो व्यंजकों को ज्ञात करें ?
- 15) यदि x^3+x^2-5x+7 व्यंजक $(x-2)$ से विभाजित है, तो x का मान कितना होगा ?

Solution

① यहाँ $x-2=0 \Rightarrow x=2$

शेषफल प्रमेय से, जब $f(x)$ बहुपद को $(x-2)$ से विभाजित किया जाये तो शेषफल = $f(2)$

$$\therefore f(2) = 2^4 + 2 \times 2^3 - 3 \times 2^2 + 2 - 1$$

[ध्यान दे : x के स्थान पर 2 रख दिया गया है]

$$\Rightarrow 16 + 16 - 12 + 2 - 1 = 21$$

$$\boxed{\text{शेषफल} = 21}$$

② भाजक = $x+3$

$$\therefore x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

शेषफल प्रमेय से,

$$\begin{aligned} \text{शेषफल} &= f(-3) = [(-3)^3 - 3(-3)^2 + 4(-3) + 50] \\ &= (-27 - 27 + 12 + 50) = -16 \end{aligned}$$

③ यहाँ $2x-1=0 \Rightarrow x=\frac{1}{2}$

शेषफल प्रमेय से -

$$\begin{aligned} \text{शेषफल} &= f\left(\frac{1}{2}\right) = \left[4 \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - 12 \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 14 \left(\frac{1}{2}\right) - 3\right] \\ &= \left(\frac{1}{2} - 3 + 7 - 3\right) = \boxed{\frac{3}{2}} \end{aligned}$$

④ $f(x) = 2x^2 + ax^2 + 3x - 5$

$$g(x) = x^3 + x^2 - 2x + a$$

शेषफल प्रमेय से,

$$f(2) = (2 \times 2^3 + a \times 2^2 + 3 \times 2 - 5) = 17 + 4a$$

$$\text{पुनः } g(2) = (2^3 + 2^2 - 2 \times 2 + a) = 8 + a$$

$$\therefore 17 + 4a = 8 + a$$

$$3a = -9$$

$$\boxed{a = -3}$$