



**1<sup>st</sup> – Grade**

**Mathematics**

**School Education**

**Rajasthan Public Service Commission**

**Paper – 2**

**Volume - 3**



# 1st Grade

## CONTENTS

### Mathematics

#### Part II- Graduation Standard (Graduation Standard)

1.	<b>Vector Calculus</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Problems with Solutions</li></ul>	1
2.	<b>Three Dimensional Geometry</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• 3-D Geometry</li><li>• Directions ratios and cosines</li><li>• Projectile</li><li>• Plane</li><li>• Straight Line</li><li>• Sphere</li><li>• Cone</li><li>• Cylinder</li></ul>	27
3.	<b>Statics</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Equilibrium of Co-planner forces</li><li>• Friction</li><li>• Moments</li><li>• Catenary</li><li>• Virtual Work</li></ul>	82
4.	<b>Dynamics</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• Velocity and Acceleration</li><li>• Angular Velocity and Angular Acceleration</li><li>• Radial and Transverse velocity and acceleration</li><li>• Velocities and acceleration along with tangential and normal directions</li><li>• Simple Harmonic Motion</li><li>• The rectilinear motion under variable laws</li><li>• Hook's law and problems</li><li>• Projectiles</li></ul>	99

**Part- III (Post Graduation Standard)**

1.	<b>Linear Algebra and Metric Space</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Vector Space</b></li><li>• <b>Linear Dependence and Independence</b></li><li>• <b>Bases</b></li><li>• <b>Linear Transformation</b></li><li>• <b>Matrix Representation of Transformation</b></li><li>• <b>Cayley- Hamilton Theorem</b></li><li>• <b>Metric Space</b></li></ul>	115
2.	<b>Integral Transform and Special Function</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Hyper-geometric function</b></li><li>• <b>Orthogonal Functions</b></li><li>• <b>Legendre's Polynomial</b></li><li>• <b>Bessel's Function</b></li><li>• <b>Laplace Transform</b></li><li>• <b>Fourier Cosine transform</b></li><li>• <b>Fourier Sine Transform</b></li></ul>	154
3.	<b>Differential Geometry and Tensors</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Curves in Space</b></li><li>• <b>Curvature</b></li><li>• <b>Torsion</b></li><li>• <b>Serret-Frenet Formula</b></li><li>• <b>Skew</b></li><li>• <b>Helices Osculating circle and sphere</b></li><li>• <b>Types of Tensors</b></li><li>• <b>Algebra of Tensors</b></li><li>• <b>Christoffel's symbol</b></li><li>• <b>Covariant Differentiation</b></li><li>• <b>Equation of Geodesics</b></li></ul>	171
4.	<b>Numerical analysis</b> <ul style="list-style-type: none"><li>• <b>Fundamental Theorem for difference calculus</b></li><li>• <b>Factorial Function</b></li><li>• <b>Reciprocal Function</b></li></ul>	188

	<ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Interpolation</b></li> <li>• <b>Newton's-Gregory forward and backward interpolation</b></li> <li>• <b>Gauss Forward and Backward interpolation</b></li> <li>• <b>Starling's interpolation formula</b></li> <li>• <b>Bessel's interpolation formula</b></li> <li>• <b>Newton's Divide difference interpolation</b></li> <li>• <b>Lagrange's interpolation formula</b></li> </ul>	
5.	<p><b>Optimization Technique</b></p> <ul style="list-style-type: none"> <li>• <b>Linear Programming Problems</b></li> <li>• <b>Simplex Method</b></li> <li>• <b>Duality</b></li> <li>• <b>Convex Sets and their properties</b></li> <li>• <b>Assignment Problem</b></li> <li>• <b>Transportation Problems</b></li> <li>• <b>Game Theory</b></li> </ul>	219

## Statics

### 1. समतलीय बलों का संतुलन :- (Equilibrium of Coplanar Forces)

#### A) संतुलन या साम्यावस्था (Equilibrium) :-

यदि किसी पिंड पर लगे दो या दो से अधिक बल उसे निरामवस्था में रखें तो वे बल साम्यावस्था में कहलाते हैं।

एक पिंड के एक ही या विभिन्न बिन्दुओं पर कार्यरत दो बल साम्यावस्था में होंगे ; यदि

(i) उनका परिमाण समान हो

(ii) विपरीत दिशा में हो

(iii) एक ही सरल रेखा के अनुदिश हो।

#### B) समतलीय बल निकाय का एक एवं बल युग्म में समान्यन :-

“किसी पिंड के विभिन्न बिन्दुओं पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय को उनके समतल में स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु पर क्रियाशील एक बल एवं बल-युग्म में समान्यत किया जा सकता है।”

⇒ माना एक दृढ़ पिंड के विभिन्न बिन्दुओं  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  पर

क्रमशः समतलीय बल  $P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  क्रियाशील हैं। बलों के समतल

में एक स्वेच्छ बिन्दु  $O$  को मूल बिन्दु तथा  $Ox, Oy$  निर्देशी अक्ष

ले लें तो  $A_1, A_2, A_3, A_4, \dots$  के निर्देशांक क्रमशः  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$

$(x_4, y_4), \dots$  हैं।

$P_1, P_2, P_3, P_4, \dots$  बलों के निर्देशी अक्षों के समान्तर विद्योहित भाग

क्रमशः  $X_1, Y_1, X_2, Y_2, X_3, Y_3, X_4, Y_4, \dots$  हैं।

$A_1$  पर बल  $X_1$  और  $O$  पर  $Ox'$  के अनुदिश क्रियाशील बल  $X_1$  रक बल युग्म बनाते हैं जिसका विधिगावर्त आघूर्ण  $-y_1 X_1$  है।

इसी प्रकार  $A_1$  पर बल  $Y_1$  और  $O$  पर  $Oy'$  के अनुदिश बल  $Y_1$  रक बल युग्म बनाते हैं जिसका वामावर्त आघूर्ण  $x_1 Y_1$  है।

अतः  $A_1$  पर क्रियाशील बल  $P_1$

(1)  $Ox$  और  $Oy$  के अनुदिश क्रियाशील बल  $X_1$  और  $Y_1$

तथा  $Y_1 x_1 - X_1 y_1$  आघूर्ण के बल युग्म के तुल्य है।

यह प्रक्रिया जारी रखने पर

$$Ox \text{ के अनुदिश} = X_1 + X_2 + X_3 + \dots = \sum X_i = R_x$$

$$Oy \text{ के अनुदिश} = Y_1 + Y_2 + Y_3 + \dots = \sum Y_i = R_y$$

$$\begin{aligned} \text{तथा बल युग्म का आघूर्ण} &= (x_1 y_1 - y_1 x_1) + (x_2 y_2 - y_2 x_2) + \dots \\ &= \sum (y_i x_i - x_i y_i) = C_1 \end{aligned}$$

माना  $R_x$  व  $R_y$  का परिणामी बल  $R$  है जो  $Ox$  से कोण  $\theta$  बनाता है।

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} \quad \text{तथा} \quad \theta = \tan^{-1} \left( \frac{R_y}{R_x} \right)$$

अतः दिए गए बल निष्पत्त का खेच बिन्दु  $O$  पर क्रियाशील बल  $R$

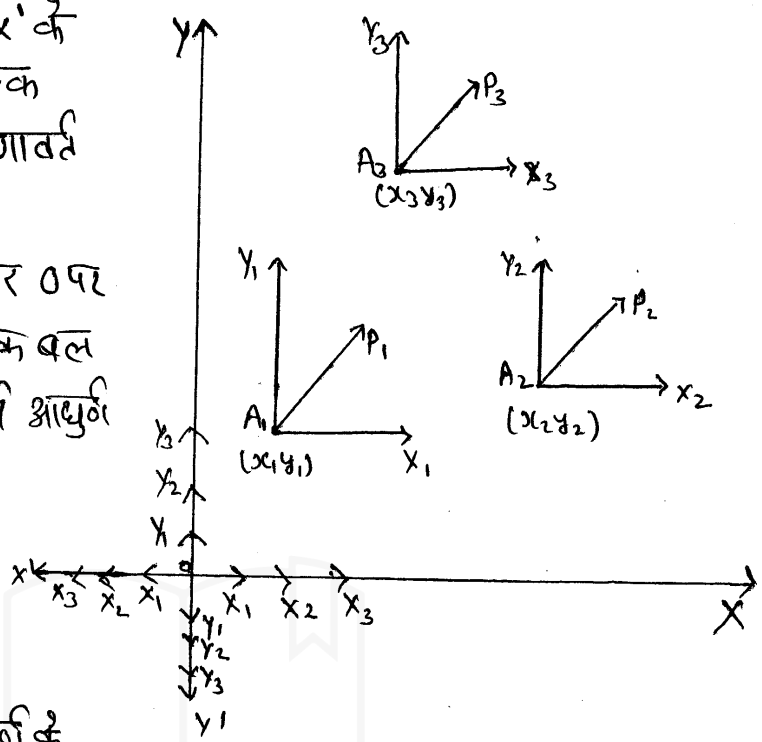
और आघूर्ण  $C_1$  के बल-युग्म में समानानुपत्त किया जा सकता है।

⇒ विशेष स्थिति:-

(i) यदि पिण्ड साम्यवस्था में हो, तो

$$R = 0 = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = 0$$

$$R_x = 0 \quad R_y = 0 \quad \text{तथा} \quad C_1 = 0$$



(ii)  $C_1$  मूल बिन्दु  $O$  की स्थिति पर निर्भर करता है जबकि  $R$  निर्भर नहीं करता है। मूल बिन्दु  $O$  के अन्य बिन्दु  $O(h, k)$  पर स्थानांतरित करते पर यदि नए बल युग्म का आधूर्ण  $C_1$  हो तो

$$C_1' = \{ (x_1 - h) Y_1 - (y_1 - k) X_1 \}$$

$$C_1' = \{ (x_1 Y_1 - h Y_1 - y_1 X_1 + k X_1) \}$$

$$C_1' = C_1 - h \sum Y_1 + k \sum X_1$$

$$C_1' = C_1 - h R_y + k R_x$$

(iii) किसी प्लेट (जो साम्यावस्था में नहीं है) के विभिन्न बिन्दुओं पर क्रियाशील समतलीय बल निष्काय का या तो एक बल या एक बल-युग्म में समानांतर किया जा सकता है।

I स्थिति: जब  $R = 0, C_1 \neq 0$

इस स्थिति में निष्काय केवल मात्र एक बल युग्म  $C_1$  में ही समाहित हो जाता है।

II स्थिति: जब  $R \neq 0, C_1 = 0$

इस स्थिति में निष्काय केवल मात्र एक परिणामी बल में समानित हो जाता है।

(iv) परिणामी का समीकरण:-

यदि कोई स्वेच्छ बिन्दु  $(h, k)$  है तथा इस बिन्दु के सापेक्ष संगत बल आधूर्ण  $C_1'$  हो तो

$$C_1' = C_1 - h R_y + k R_x$$

परन्तु परिणामी की क्रियारैखा पर स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष बलों के आधूर्णों का बीजीय योग शून्य होता है।

इसलिए  $C_1' = 0$

$$C_1 - h R_y + k R_x = 0$$

$$h R_y - k R_x = C_1$$

अतः  $(h, k)$  का बिन्दु पथ  $h R_y + k R_x = C_1$  जो कि परिणामी का अग्रोष्ठ समीकरण है।

© तीन बलों के अंतर्गत एक पिंड की साम्यवस्था:-

(Equilibrium of a Rigid body Under Three Forces)

"यदि किसी पिंड पर क्रियाशील तीन समतलीय बल उसी साम्यवस्था में रखाएँ हों तो वे बल एक बिन्दु पर मिलेंगे या समान्तर होंगे।"

⇒ माना एक बड़े पिंड के बिन्दु A, B और C पर तीन समतलीय बल P, Q और R क्रियाशील हैं जिसके अंतर्गत पिंड-साम्यवस्था में है।

I स्थिति → जब P और Q की क्रियाशील रेखाएँ समान्तर हों :-

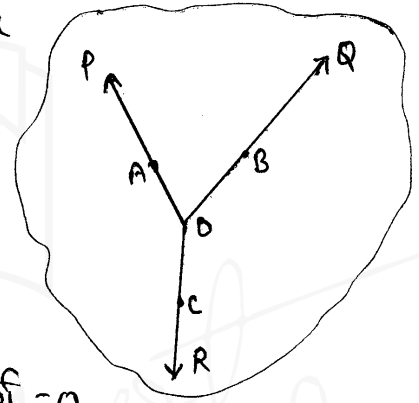
जब P और Q की क्रियाशील रेखाएँ समान्तर

नहीं हैं तो वे एक बिन्दु O पर मिलेंगी।

तीनों बल साम्यवस्था में होने के कारण

बिन्दु O के सापेक्ष तीनों बलों के

आघूर्णों का योग शून्य होगा।



अतः O के सापेक्ष

$$P \text{ का आघूर्ण} + Q \text{ का आघूर्ण} + R \text{ का आघूर्ण} = 0$$

अर्थात् बिन्दु O के सापेक्ष R का आघूर्ण शून्य है। परन्तु  $R \neq 0$ ।

इसलिए R की क्रियाशील रेखा बिन्दु O से गुजरनेगी।

अतः तीनों बल P, Q, R एक ही बिन्दु O से गुजरेंगे।

II स्थिति → जब P और Q की क्रियाशील रेखाएँ समान्तर हों :-

यदि P और Q समान्तर बल हैं तो उनका परिणामी भी उनके समान्तर होगा। परन्तु P, Q तथा R साम्यवस्था में हैं,

अतः P और Q का परिणामी R से संतुलित होगा।

परिणामतः R, P और Q के परिणामी के बराबर तथा विपरीत दिशा

में होगा। अतः R की क्रियाशील रेखा भी P और Q की

क्रियाशील रेखाओं के समान्तर होगी।

निष्कर्ष ⇒ कोई पिंड तीन समतलीय बलों के अंतर्गत साम्यवस्था में है तो वे बल या तो संगामी होंगे या फिर समान्तर होंगे।

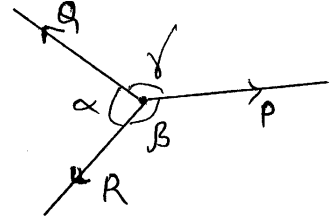


⇒ संबंधित प्रमेय :-

(1.) Lami's Theorem (लामी प्रमेय) :-

“किसी बिन्दु पर क्रियात तीन बल यदि साम्यावस्था में हों तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के मध्य कोण के Sine के समानुपातिक होता है।”

$$\frac{P}{\sin \alpha} = \frac{Q}{\sin \beta} = \frac{R}{\sin \gamma}$$



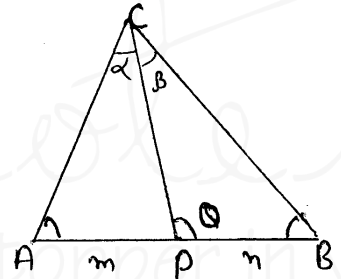
जहाँ P, Q और R साम्यावस्था के बल हैं तथा  $\alpha, \beta$ , और  $\gamma$  इनके मध्य बने कोण

(2.) त्रिकोणमितीय प्रमेय :-

यदि  $\triangle ABC$  के आधार AB पर कोई बिन्दु P है जो AB को  $m:n$  के अनुपात में बाँटता है और कोण C को  $\alpha, \beta$  में बाँटता है तथा  $\angle CPB = \theta$  है तो

$$(i) (m+n) \cot \theta = m \cot \alpha - n \cot \beta$$

$$(ii) (m+n) \cot \theta = n \cot A - m \cot B$$



(D) तीन से अधिक क्रियाशील बलों के अन्तर्गत किसी दृढ़ पिंड की साम्यावस्था :-

(1.) किसी दृढ़ पिंड पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि दो समन्वोधिक दिशाओं में उनके वियोजित भागों का योग पृथक-पृथक शून्य हो और यदि बलों के समतल में स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

(2.) किसी दृढ़ पिंड पर क्रियाशील एक समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि तीन असरेखीय बिन्दुओं के प्रत्येक के परितः बलों के आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

$\Rightarrow$  माना एक मूल बिन्दु के सापेक्ष अन्य दो बिन्दुओं के निर्देशांक  $(h, k)$  व  $(h', k')$  हैं।

$\therefore$  तीनों बिन्दु असरेखीय हैं।

$$\therefore \frac{h}{k} \neq \frac{h'}{k'}$$

$$hk' - h'k \neq 0 \quad \dots \text{--- (1)}$$

$(0,0)$ ,  $(h,k)$  तथा  $(h',k')$  के पारित किए गए बलों के आधुनी के बीजीय योग क्रमशः  $C_1$ ,  $C_2$  और  $C_3$  हैं।

$$C_1 = 0 \quad \dots \text{--- (2)}$$

$$C_2 = C_1 - hR_y + kR_x = 0 \quad \dots \text{--- (3)}$$

$$C_3 = C_1 - h'R_y + k'R_x = 0 \quad \dots \text{--- (4)}$$

समी. (1), (2) और (3) से

$$-hR_y + kR_x = 0$$

$$-h'R_y + k'R_x = 0$$

हल करने पर

$$(hk' - h'k)R_x = 0$$

$$(h'k - h'k)R_y = 0$$

किसी समी (1) से  $hk' - h'k \neq 0$

$$\text{अतः } R_x = 0 \quad \text{या } R_y = 0$$

$$C_1 = 0$$

अतः बल निकाय साम्यावस्था में है।

(3.) किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा यदि दो किन्हीं बिन्दुओं के, प्रत्येक के सापेक्ष आधुनीका बीजीय योग शून्य है, और किसी तीसरे बिन्दु के अनुच्छिन्न जो उन बिन्दुओं के मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् नहीं है बलों के वियोजित भागों का बीजीय योग शून्य है।

## 2. घर्षण (FRICTION):-

### (A) घर्षण एवं बर्षण बल:-

एक रूढ़ मैज पर  $W$  भार का पिंड विराम अवस्था में है। इस अवस्था में दो बल क्रियाशील हैं।

(i) इसके भार  $W$  बल उर्ध्वदिश नीचे की ओर ( $\downarrow$ )

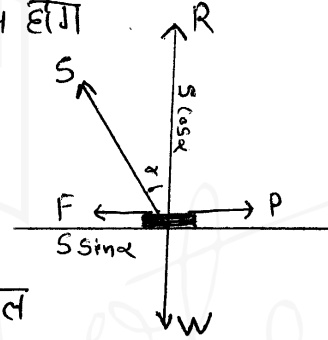
(ii) मैज की प्रतिक्रिया बल  $R$  विपरीत दिशा उपरकी ओर ( $\uparrow$ )  
साम्यावस्था के लिए  $R = W$

अब पिंड पर धीरे-धीरे एक क्षैतिज खिंचाव बल  $P(\rightarrow)$  लगाया जाता है। इसी स्थिति में पिंड पर तीन बल क्रियाशील होंगे

(i) इसके भार बल ( $\downarrow$ )

(ii) क्षैतिज खिंचाव बल  $P(\rightarrow)$

(iii) मैज की प्रतिक्रिया बल  $S$



अतः  $W$  और  $P$  का परिणामी बल, प्रतिक्रिया बल  $S$  से संतुलित होगा।

अतः  $S$  उर्ध्वदिश के साथ किसी कोण ( $\alpha$ ) पर झुका होगा।

यदि  $S$  के क्षैतिज एवं उर्ध्व विद्योजित भाग  $F$  और  $R$  होंगे

$$F = S \sin \alpha = P$$

$$R = S \cos \alpha = W$$

$$\text{तथा } \tan \alpha = \frac{P}{R} \quad \text{होगा}$$

क्योंकि  $R$  एवं  $W$  बराबर हैं अतः लंबवर्ती बल  $P$  बढ़ाया जायेगा,  $F$  और  $\alpha$  बढ़ेगी। सीमान्त सन्तुलन की अवस्था पर  $F$  और  $\alpha$  के मान अधिकतम होंगे, तदुपरान्त  $P$  में तनिक धक्के ही पिंड को गति प्रदान कर देगी।

यह बल  $F$  ही घर्षण बल कहलाता है तथा पिंड का वह गुण जिसके कारण यह बल स्वतः उत्पन्न हुआ घर्षण कहलाता है।

$R \rightarrow$  अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल एवं  $S \rightarrow$  परिणामी प्रतिक्रिया बल

⇒ परिभाषा :- "जब दो पिण्ड परस्पर स्पर्श करते हैं, तो पिण्डों का वह गुण जिसके कारण उनके स्पर्श बिन्दु पर एक ऐसा स्पर्शिय प्रतिक्रिया बल उत्पन्न होता है, जो एक पिण्ड को दूसरे पर किसलने या गति करने से रोकता है 'घर्षण' कहलाता है। और उस बल को 'घर्षण बल' कहते हैं।"

### (B) घर्षण के प्रकार :- (Kinds of friction)

- (i) स्थैतिक घर्षण :- जब दो पिण्ड परस्पर स्पर्श करते हुए साम्यावस्था में हों, तो उनके स्पर्श बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण, स्थैतिक घर्षण कहलाता है।
- (ii) सीमान्त घर्षण :- जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड पर है किसलने की अवस्था में है अर्थात् सीमान्त सन्तुलन की अवस्था है, तो उनके स्पर्श बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण अधिकतम होगा, जिसे सीमान्त घर्षण कहते हैं।
- (iii) गतिक घर्षण :- जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड पर किसलत रहा हो तो ऐसी अवस्था में उनके स्पर्श बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण को गतिक घर्षण कहते हैं।

### (C) घर्षण - कोण :- (Angle of friction)

जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड के सम्पर्क में हो तो उनके स्पर्श बिन्दु पर परिणामी प्रतिक्रिया बल एवं अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के मध्य का कोण घर्षण - कोण कहलाता है जिसे  $\lambda$  से व्यक्त करते हैं।

$$\tan \lambda = \frac{\text{चरम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल}} = \frac{F}{R} \quad \dots (1)$$

⇒ घर्षण गुणांक :- जब एक पिण्ड दूसरे पिण्ड के सम्पर्क में सीमान्त सन्तुलन में हो तो उनके स्पर्श बिन्दु पर चरम घर्षण बल व अभिलम्ब प्रतिक्रिया में एक निश्चित अनुपात होता है। इस अनुपात को ही घर्षण गुणांक कहते हैं इसीसे  $\mu$  से व्यक्त करते हैं।

$$\mu = \frac{\text{चरम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}} = \frac{F}{R} \quad \dots (2)$$

$$F = \mu R$$

Note:  $\mu$  का मान सदैव 0 और 1 के मध्य होता है।  
 $0 < \mu < 1$

(ii) पूर्ण चिकने (Smooth) पिंड के लिए  $\mu = 0$

समी. (1) व (2) से

$$\mu = \tan \lambda$$

$$\text{घर्षण गुणांक} = \tan(\text{घर्षण कोण})$$

### (D) घर्षण के नियम (Laws of friction):-

Law I. जब दो पिंड परस्पर स्पर्श करते हैं तो स्पर्श बिन्दु पर घर्षण बल की दिशा स्पर्श बिन्दु की गति की दिशा के विपरीत होगी।

Law II. सतुल्य की अवस्था में उसका परिमाण केवल उतना होता है जितना कि पिंड का गतिमान होने से रोकने का पर्याप्त हो।

Law III. चरम घर्षण बल और पिंड की अभिलम्ब प्रतिक्रिया का अनुपात अर्थात् घर्षण गुणांक  $\mu$  निश्चित होता है, जो पिंडों के पदार्थों की प्रकृति पर निर्भर करता है।

Law IV. चरम घर्षण स्पर्श करने वाले पृष्ठों के आधार पर निर्भर नहीं करता जब तक कि अभिलम्ब प्रतिक्रिया अपरिवर्तित रहती है।

Law V. जब पिंड गतिमान अवस्था में है तब घर्षण गुणांक  $\mu$  का परिमाण पिंड की स्थैतिक अवस्था की अपेक्षा कुछ कम होता है।  $\mu$  पिंडों के वेग पर निर्भर नहीं करता।

### (E) आगत समतल पर सीमान्त सतुल्य:-

" किसी आगत समतल पर रखा एक पिंड अपने किसलने की अवस्था में है तो समतल का ढलान से

$$\text{शुकाव कोण} = \text{घर्षण कोण}$$

$$\lambda = \alpha$$

"