Toppersnotes®
Unleash the topper in you

1st – Grade

Mathematics

School Education

Rajasthan Public Service Commission

Paper – 2

Volume - 3

SIERRA INNOVATIONS

1st Grade

CONTENTS

	• **Interpolation** • **Newton's-Gregory forward and backward interpolation** • **Gauss Forward and Backward interpolation** • **Starling's interpolation formula** • **Bessel's interpolation formula** • **Newton's Divide difference interpolation** • **Lagrange's interpolation formula**	
5.	**Optimization Technique** • **Linear Programming Problems** • **Simplex Method** • **Duality** • **Convex Sets and their properties** • **Assignment Problem** • **Transportation Problems** • **Game Theory**	219

Statics

1. समतलीय बलों का संतुलन :-
(Equilibrium of Coplanar Forces)

(A) संतुलन या साम्यावस्था (Equilibrium):-

यदि किसी पिण्ड पर लगे दो या दो से अधिक बल उसे विरामावस्था में रखे तो वे बल साम्यावस्था में कहलाते है।

एक पिण्ड के एक ही या भिन्न-भिन्न बिन्दुओं पर कार्यरत दो बल साम्यावस्था में होंगे; यदि

(i) उनका परिमाण समान हो

(ii) विपरीत दिशा में हो

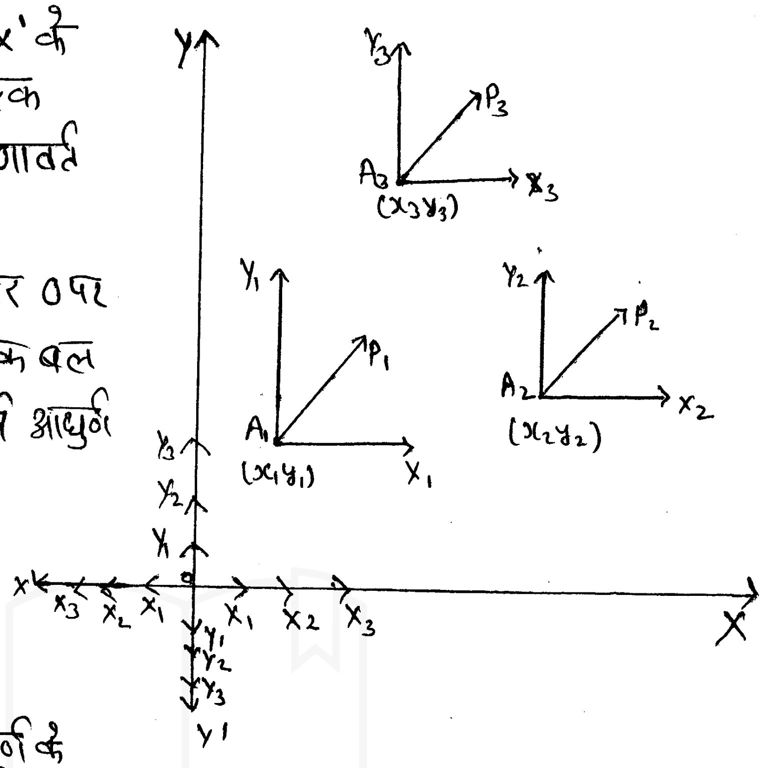
(iii) एक ही सरल रेखा के अनुदिश हो।

(B) समतलीय बल निकाय का एक एवं बल युग्म में समानयन :-

"किसी पिण्ड के विभिन्न बिन्दुओं पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय को उनके समतल में स्थित किसी स्वेच्छ बिन्दु पर क्रियाशील एक बल एवं बल-युग्म में समानीत किया जा सकता है।"

⇒ माना एक दृढ़ पिण्ड के विभिन्न बिन्दुओं $A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots$ पर क्रमशः समतलीय बल $P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \ldots$ क्रियाशील है। बलों के समतल में एक स्वेच्छ बिन्दु O को मूल बिन्दु तथा OX, OY निर्देशी अक्ष ले तो $A_1\ A_2\ A_3\ A_4 \ldots$ के निर्देशांक क्रमशः $(x_1 y_1), (x_2 y_2) (x_3 y_3) (x_4 y_4) \ldots$ है।

$P_1\ P_2\ P_3\ P_4 \ldots$ बलों के निर्देशी अक्षों के समान्तर वियोजित भाग क्रमशः $X_1 Y_1, X_2 Y_2, X_3 Y_3, X_4 Y_4 \ldots$ है।



A_1 पर बल X_1 और O पर OX' के अनुदिश क्रियाशील बल X_1 एक बलयुग्म बनाते हैं। जिसका दक्षिणावर्त आघूर्ण $-y_1 X_1$ है।

इसी प्रकार A_1 पर बल Y_1 और O पर OY' के अनुदिश बल Y_1 एक बल युग्म बनाते हैं। जिसका वामावर्त आघूर्ण $x_1 Y_1$ है।

अतः A_1 पर क्रियाशील बल P_1

(1) OX और OY के अनुदिश क्रियाशील बल X_1 और Y_1 तथा $Y_1 x_1 - X_1 y_1$ आघूर्ण के बलयुग्म के तुल्य है।

यह प्रक्रिया जारी रखने पर

OX के अनुदिश $= X_1 + X_2 + X_3 + \cdots = \Sigma X_1 = R_x$

OY के अनुदिश $= Y_1 + Y_2 + Y_3 + \cdots = \Sigma Y_1 = R_y$

तथा बल युग्म का आघूर्ण $= (x_1 Y_1 - y_1 X_1) + (x_2 Y_2 - y_2 X_2) + \cdots$

$$= \Sigma (Y_1 x_1 - X_1 y_1) = G$$

माना R_x व R_y का परिणामी बल R है जो OX से कोण θ बनाता है तो

$$R = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} \quad \text{तथा} \quad \theta = \tan^{-1}\left(\frac{R_y}{R_x}\right)$$

अतः दिए गए बल निकाय का स्वेच्छ बिन्दु O पर क्रियाशील बल R और आघूर्ण G के बल-युग्म मे समानयन किया जा सकता है।

⇒ विशेष स्थिति:-

(i) यदि पिण्ड साम्यवस्था मे हो, तो

$$R = 0 = \sqrt{(R_x^2 + R_y^2)} = 0$$

$R_x = 0$ $\quad R_y = 0$ $\quad$ तथा $G = 0$

(ii) G, मूल बिन्दु O की स्थिति पर निर्भर करता है जबकि R निर्भर नहीं करता है। मूल बिन्दु O को अन्यत्र बिन्दु O(h, k) पर स्थानांतरित करने पर यदि नए बल युग्म का आघूर्ण G' है तो

$$G' = \Sigma\{(x_1-h)Y_1 - (y_1-k)X_1\}$$

$$G' = \Sigma(x_1Y_1 - hY_1 - y_1X_1 + kX_1)$$

$$G' = G - h\Sigma Y_1 + k\Sigma X_1$$

$$G' = G - hR_y + kR_x$$

(iii) किसी पिण्ड (जो साम्यावस्था में नहीं हो) के विभिन्न बिन्दुओं पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय का या तो एक बल या एक बल-युग्म में समानयन किया जा सकता है

I स्थिति : जब $R=0,\ G\neq 0$
इस स्थिति में निकाय केवल मात्र एक बल युग्म G में ही समाहित हो जाता है।

II स्थिति : जब $R\neq 0,\ G=0$
इस स्थिति में निकाय केवल मात्र एक परिणामी बल में समानीत हो जाता है।

(iv) परिणामी का समीकरण :-
यदि कोई स्वेच्छ बिन्दु (h, k) है तथा इस बिन्दु के सापेक्ष संगत बल आघूर्ण G' हो तो

$$G' = G - hR_y + kR_x$$

परन्तु परिणामी की क्रियारेखा पर स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष बलों के आघूर्णों का बीजीय योग शून्य होता है।

अर्थात $\quad G' = 0$

$$G - hR_y + kR_x = 0$$

$$hR_y - kR_x = G$$

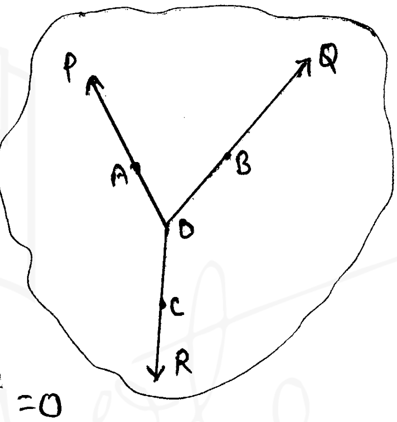
अतः (h, k) का बिन्दुपथ $xR_y + yR_x = G$ जो कि परिणामी का अभीष्ट समीकरण है।

(C) तीन बलों के अन्तर्गत एक पिण्ड की साम्यवस्था :-
(Equilibrium of a Rigid body Under Three Forces)

"यदि किसी पिण्ड पर क्रियाशील तीन समतलीय बल उसे साम्यावस्था मे रखते हो तो वे बल एक बिन्दु पर मिलेंगे या समान्तर होंगे।"

⇒ माना एक दृढ़ पिण्ड के बिन्दु A, B और C पर तीन समतलीय बल P, Q और R क्रियाशील है जिसके अंतर्गत पिण्ड साम्यवस्था मे है।

I स्थिति → जब P और Q की क्रियाशील रेखाएं समान्तर नहीं हो :-



जब P और Q की क्रियाशील रेखाएं समान्तर नही है तो वे एक बिन्दु O पर मिलेगी। तीनो बल साम्यावस्था मे होने के कारण बिन्दु O के सापेक्ष तीनो बलो के आघूर्णों का योग शुन्य होगा

अतः O के सापेक्ष

P का आघूर्ण + Q का आघूर्ण + R का आघूर्ण = 0

अर्थात बिन्दु O के सापेक्ष R का आघूर्ण शून्य है। परन्तु $R \neq 0$।
इसलिए R की क्रियाशील रेखा बिन्दु O से गुजरेगी

अतः तीनो बल P, Q, R एक ही बिन्दु O से गुजरेंगे।

II स्थिति → जब P और Q की क्रियाशील रेखाएं समान्तर हो :-

यदि P और Q समान्तर बल है तो उनका परिणामी भी इनके समान्तर होगा। परन्तु P, Q तथा R साम्यावस्था में है, अतः P और Q का परिणामी R से संतुलित होगा।

परिणामतः R, P और Q के परिणामी के बराबर तथा विपरीत दिशा मे होगा। अतः R की क्रियाशील रेखा भी P और Q की क्रियाशील रेखाओ के समान्तर होगी।

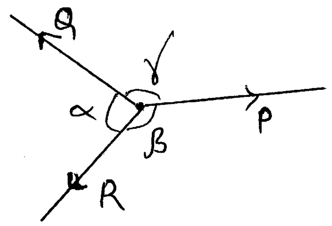
निष्कर्ष ⇒ कोई पिण्ड तीन समतलीय बलों के अंतर्गत साम्यवस्था मे हो तो वे बल या तो संगामी होंगे या फिर समान्तर होंगे।

⇒ संबंधित प्रमेय :-

(1.) Lami's Theorem (लामी प्रमेय) :-

"किसी बिन्दु पर क्रियारत तीन बल यदि साम्यावस्था में हों तो प्रत्येक बल शेष दो बलों के मध्य कोण के Sine के समानुपातिक होता है"

$$\frac{P}{\sin\alpha} = \frac{Q}{\sin\beta} = \frac{R}{\sin\gamma}$$



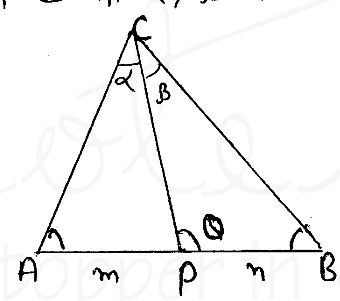
जहाँ P, Q और R साम्यावस्था के बल हैं
तथा α, β, और γ इनके मध्य बने कोण

(2.) त्रिकोणमितीय प्रमेय :-

यदि △ABC के आधार AB पर कोई बिन्दु P है जो AB को m : n के अनुपात में बाँटता है और कोण C को α, β में बाँटता है तथा ∠CPB = θ हो तो

(i) $(m+n)\cot\theta = m\cot\alpha - n\cot\beta$

(ii) $(m+n)\cot\theta = n\cot A - m\cot B$



(D.) तीन से अधिक क्रियाशील बलों के अन्तर्गत किसी दृढ़ पिंड की साम्यावस्था :-

(1.) किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि दो समकोणिक दिशाओं में उनके वियोजित भागों का योग पृथक-पृथक शून्य हो और यदि बलों के समतल में स्थित किसी बिन्दु के सापेक्ष आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

(2.) किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील एक समतलीय बल निकाय साम्यावस्था में होगा, यदि तीन असरेखीय बिन्दुओं के प्रत्येक के परित बलों के आघूर्णों का बीजीय योग शून्य हो।

⇒ माना एक मूल बिन्दु के सापेक्ष अन्य दो बिन्दुओं के निर्देशांक (h, k) व (h', k') है।

∵ तीनों बिन्दु असरेखीय है।

$\therefore \frac{h}{k} \neq \frac{h'}{k'}$

$hk' - h'k \neq 0$ --- (1)

$(0,0)$, (h,k) तथा (h',k') के पारित दिए गए बलों के आघूर्णों के बीजीय योग क्रमशः G_1, G_2 और G_3 है।

$G_1 = 0$ ---- (2)

$G_2 = G - hR_y + kR_x = 0$ --- (3)

$G_3 = G - h'R_y + kR_x = 0$ --- (4)

समी. (1) (2) और (3) से

$-hR_y + kR_x = 0$

$-h'R_y + k'R_x = 0$

हल करने पर

$(hk' - h'k)R_x = 0$

$(h'k - h'k)R_y = 0$

किन्तु समी (1) से $hk' - h'k \neq 0$

अतः $R_x = 0$ या $R_y = 0$

$G_1 = 0$

अतः बल निकाय साम्यावस्था में है।

(3.) किसी दृढ़ पिण्ड पर क्रियाशील समतलीय बल निकाय साम्यावस्था मे होगा यदि दो भिन्न बिन्दुओं के, प्रत्येक के सापेक्ष आघूर्णों का बीजीय योग शून्य है, और किसी दी दिशा के अनुदिश जो उन बिन्दुओं के मिलाने वाली रेखा के लम्बवत् नहीं है बलों के वियोजित भागों का बीजीय योग शून्य है।

२. घर्षण (FRICTION):-

(A) घर्षण एवं घर्षण बल:-

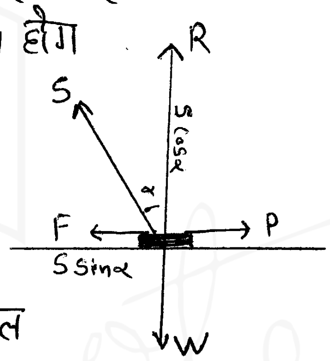
एक रूखा मेज पर W भार का पिण्ड विराम अवस्था में है। इस अवस्था में दो बल क्रियाशील है।

(i) इसका भार W बल उर्ध्वाधर नीचे की ओर (↓)

(ii) मेज की प्रतिक्रिया बल R विपरीत दिशा ऊपर की ओर (↑)

साम्यावस्था के लिए $R = W$

जब पिण्ड पर धीरे २ एक क्षैतिज खिंचाव बल $P(\rightarrow)$ लगाया जाता है। ऐसी स्थिति मे पिण्ड पर तीन बल क्रियाशील होगे



(i) इसका भार बल (↓)

(ii) क्षैतिज खिंचाव बल $P(\rightarrow)$

(iii) मेज की प्रतिक्रिया बल S

अतः W और P का परिणामी बल, प्रतिक्रिया बल S से संतुलित होगा।

अतः S उर्ध्वाधर के साथ किसी कोण (α) पर झुका होगा।

यदि S के क्षैतिज एवं उर्ध्व वियोजित भाग F और R हो तो

$$F = S \sin\alpha = P$$

$$R = S \cos\alpha = W$$

तथा $\tan\alpha = \frac{P}{R}$ होगा।

क्योंकि R एवं W बराबर है अतः ज्यों ज्यों बल P बढ़ाया जायेगा, F और α बढ़ेगी। सीमान्त सन्तुलन की अवस्था पर F और α के मान अधिकतम होगे, तदुपरान्त P मे तनिक वृद्धि ही पिण्ड को गति प्रदान कर देगी।

यह बल F ही घर्षण बल कहलाता है तथा पिण्ड का वह गुण जिसके कारण यह बल स्वतः उत्पन्न हुआ घर्षण कहलाता है।

R → अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल एवं S → परिणामी प्रतिक्रिया बल

⇒ परिभाषा :- "जब दो पिण्ड परस्पर स्पर्श करते हो, तो पिण्डों का वह गुण जिसके कारण उनके स्पर्श बिन्दु पर एक ऐसा स्पर्शीय प्रतिरोधी बल उत्पन्न होता है, जो एक पिण्ड को दुसरे पर फिसलने या गति करने से रोकता है 'घर्षण' कहलाता है। और उस बल को 'घर्षण बल' कहते है।"

(B) घर्षण के प्रकार :- (Kinds of friction)

(i) स्थैतिक घर्षण :- जब दो पिण्ड परस्पर स्पर्श करते हुए साम्यावस्था मे हो, तो उनके स्पर्श बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण, स्थैतिक घर्षण कहलाएगा

(ii) सीमान्त घर्षण :- जब एक पिण्ड दुसरे पिण्ड पर से फिसलने की अवस्था में हो अर्थात् सीमान्त सन्तुलन की अवस्था हो, तो उनके स्पर्श बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण अधिकतम होगा, जिसे सीमान्त घर्षण कहते हैं।

(iii) गतिक घर्षण :- जब एक पिण्ड दुसरे पिण्ड पर फिसल रहा हो तो ऐसी अवस्था मे उनके स्पर्शी बिन्दु पर उत्पन्न घर्षण को गतिक घर्षण कहते है।

(C) घर्षण - कोण :- (Angle of friction)

जब एक पिण्ड दुसरे पिण्ड के सम्पर्क में हो तो उनके स्पर्शी बिन्दु पर परिणामी प्रतिक्रिया बल एवं अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल के मध्य का कोण घर्षण - कोण कहलाता है जिसे λ से व्यक्त करते है।

$$\tan \lambda = \frac{\text{चरम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया बल}} = \frac{F}{R} \quad \cdots (1)$$

⇒ घर्षण गुणांक :- जब एक पिण्ड दुसरे पिण्ड के सम्पर्क मे सीमान्त सन्तुलन में हो तो उनके स्पर्श बिन्दु पर चरम घर्षण बल व अभिलम्ब प्रतिक्रिया में एक निश्चित अनुपात होता है। इस अनुपात को ही घर्षण गुणांक कहते है जिसे μ से व्यक्त करते है

$$\mu = \frac{\text{चरम घर्षण बल}}{\text{अभिलम्ब प्रतिक्रिया}} = \frac{F}{R} \quad \cdots (2)$$

$$F = \mu R$$

Note: (i) μ का मान सदैव 0 और 1 के मध्य होता है।

$$0 < \mu < 1$$

(ii) पूर्ण चिकने (Smooth) पिण्ड के लिए $\mu = 0$

समी. ① व ② से

$$\mu = \tan \lambda$$

घर्षण गुणांक = tan(घर्षण कोण)

(D) घर्षण के नियम (Laws of friction):-

Law I. जब दो पिण्ड परस्पर स्पर्श करते है तो स्पर्श बिन्दु पर घर्षण बल की दिशा स्पर्श बिन्दु की गति की दिशा के विपरीत होगी।

Law II. सन्तुलन की अवस्था मे उसका परिमाण केवल उतना होता है जितना कि पिण्ड को गतिमान होने से रोकने को पर्याप्त हो।

Law III. चरम घर्षण बल और पिण्ड की अभिलम्ब प्रतिक्रिया का अनुपात अर्थात घर्षण गुणांक μ निश्चित होता है, जो पिण्डो के पदार्थो की प्रकृति पर निर्भर करता है।

Law IV. चरम घर्षण स्पर्श करने वाले पृष्ठो के आधार पर निर्भर नहीं करता जब तक कि अभिलम्ब प्रतिक्रिया अपरिवर्तित रहती है।

Law V. जब पिण्ड गतिमान अवस्था में हो तब घर्षण गुणांक μ का परिमाण पिण्ड की स्थैतिक अवस्था की अपेक्षा कुछ कम होता है। μ पिण्डो के वेग पर निर्भर नहीं करता।

(E) आनत समतल पर सीमान्त सन्तुलन:-

" किसी आनत समतल पर रखा एक पिण्ड अपने फिसलने की अवस्था मे हो तो समतल का क्षैतिज से झुकाव कोण = घर्षण कोण

$$\lambda = \alpha$$
"