Toppersnotes®
Unleash the topper in you

1st – Grade

Mathematics

School Education

Rajasthan Public Service Commission

Paper – 2

Volume - 2

SIERRA INNOVATIONS

1st Grade

CONTENTS

Mathematics		
Part II- Graduation Standard (Graduation Standard)		
1.	**Group Theory** • Group and their simple properties • Order of a group • Order of an element • Permutation Group • Cyclic Group • Subgroups and their basic algebric properties • Cosets and their properties	1
2.	**Normal subgroups and Rings** • Normal Subgroups • Homomorphism • Rings • Ideal • Quotient Groups • Group morphism	31
3.	**Theory of Equation** • Relations between the roots and coefficients • Transformation of the equation • Solutions of the cubic equation by Cardon's Method	66
4.	**Calculus** • Partial Derivatives • Asymptotes • Maxima and Minima • Fundamental theorem of integral calculus • Double and triple integral	86

	• **Gamma Function** • **Beta Function** • **Curvature** • **Envelopes**	
5.	**Advanced Calculus** • **Mean Value's Theorem (Rolle's theorem, Lagrange's Theorem)** • **Sequence and series with convergence properties**	154
6.	**Complex Analysis** • **Continuity and differentiability of complex functions** • **Analytical Function** • **Cauchy-Riemman Equation** • **Harmonic Function** • **Conformal mapping**	170
7.	**Ordinary and Partial Differential Equation** • **Linear differential equation of first order and higher degree** • **Clairaut's Form** • **Lagrange's method** • **Partial differential equation**	202
8.	**Vector Calculus** • **Differential Operators (Gradient, divergence, curl)** • **Surface Integrals** • **Volume integrals** • **Gauss Divergence theorem** • **Stoke's Theorem** • **Green's Theorem**	253

Group Theory

द्विआधारी संक्रियाओं के Ex:-

Ex:- ① संक्रिया '+' समुच्चय N में एक द्विआधारी संक्रिया है। $(a+b \in N)$

② संक्रिया '+' समुच्चय Z में ,, ——

③ संक्रिया '×' —,, Z —,, ——

④ संक्रिया '−' समुच्चय Z —,, ——

⑤ संक्रिया '−' समुच्चय N में द्विआधारी नहीं है।

⑥ संक्रिया '+' & '×' समुच्चय Q & R में व C में द्विआधारी संक्रिया है।

⑦ संक्रिया ÷ समुच्चय Q_0, R_0, C_0 में द्विआधारी संक्रियाएँ है।

⑧ समान कोटि के matrix के समुच्चय में $X = \{A : A = (a_{ij})_{m\times n}, a_{ij} \in C\}$ मैट्रिक्स योग की संक्रिया एक द्विआधारी संक्रिया है।

⑨ समान कोटि के वर्ग मैट्रिक्सों के समुच्चय $M = \{A : A = (a_{ij})_{n\times n}, a_{ij} \in R\}$ में मैट्रिक्स योग & मैट्रिक्स गुणन दोनों द्विआधारी संक्रियाएँ है।

⑩ समुच्चयों से समुच्चय U में संक्रियाएँ ∪ & ∩ दोनों द्विआधारी संक्रियाएँ है।

$\because A\cup B \in U$ & $A\cap B \in U$ $\forall A, B \in U$

☆ द्विआधारी संक्रियाओं की सं. ⇒

यदि समुच्चय A में n अवयव हो, तब Set A पर परिभाषित द्विआधारी संक्रियाओं की सं. ⇒ n^{n^2} होगी।

$\because n(A) = n$

$\therefore n(A\times A) = n\cdot n = n^2$

$A\times A$ से A पर परिभाषित फलनों की सं. $= n^{n^2}$ होगी।

Ex:- ① Set $A = \{a, b, c\}$ पर परिभाषित ~~द्विआधारी~~ संक्रियाओं की सं. $= 3^9$ होगी।

	संवृत	साहचर्य	तत्समक	प्रतिलोम	क्रमविनिमय
ग्रुपओएड	✓	—	—	—	—
लूप	✓	—	✓	✗—	—
सेमीग्रुप	✓	✓	—	—	—
मोनोएड	✓	✓	✓	—	—
ग्रुप	✓	✓	✓	✓	—
क्रमविनिमय/ आबेली ग्रुप	✓	✓	✓	✓	✓

सेमी ग्रुप के उदा. ⇒

1. $(N, +)$
2. $(N, \times)$
3. $(Z, +)$
4. $(Z, \times)$
5. $(Q, +)$
6. $(Q, \times)$
7. $(R, +)$
8. $(R, \times)$
9. $(C, +)$
10. $(C, \times)$
11. $(U, \cup)$
12. $(U, \cap)$

Group के उदा. ⇒

(1) $(Z, +)$ ⇒

संवृत ⇒ $a + b \in Z \;\; \forall a, b \in Z$

$Z, +$ के लिए संवृत है।

साहचर्य ⇒ $(a+b)+c = a+(b+c) \;, \forall a, b, c \in Z$

तत्समक ⇒ $\because 0 \in Z$ & $a + 0 = 0 = a + 0 \;, \forall a \in Z$

प्रतिलोम ⇒ $\because a \in Z \;\; \therefore -a \in Z \Rightarrow a + (-a) = 0 = (-a) + a$

$\therefore$ $(z, +)$ group है।

क्रमविनिमेय $\Rightarrow$ $a+b = b+a \quad \forall\, a, b \in z$

अतः $(z, +)$ एक आबेली group है।

(2) $(Q, +)$ (8) $(m, +)$

(3) $(R, +)$

(4) $(C, +)$

(5) $(Q, \times)$

(6) $(R, \times)$

(7) $(C, \times)$

here m, m×n कोटि के मैट्रिक्सों का set हो। जो सम्मिश्र संख्याओं पर परिभाषित है।

परिमित group $\Rightarrow$

(9) $G_0 = (\{0\}, +)$

(10) $G_1 = (\{1\}, \times)$

(11) $G_2 = (\{1, -1\}, \times)$

(12) $G_3 = (\{1, \omega, \omega^2\}, \times)$

(13) $G_4 = (\{1, -1, i, -i\}, \times)$

(14) $G_5 = (\{0, 1, 2, 3, 4\}, +_5)$

(15) $G_6 = (\{1, 2, 3, 4\}, \times_5)$

$\times$	1	-1
1	1	-1
-1	-1	1

$\times$	1	ω	ω^2
1	1	ω^2	ω^2
ω	ω	ω^2	1
ω^2	ω^2	1	ω

$\times$	1	-1	i	$-i$
1	1	-1	$+i$	$-i$
-1	-1	1	$-i$	i
i	i	$-i$	-1	1
$-i$	$-i$	i	1	-1

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	5
2	2	3	4	5	1
3	3	4	5	$\cancel{1}$	2
4	4	5	1	2	3

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	3

Q.77) $a * b = a + b - ab$

given $G = R - \{1\}$

(G, o) ; $a * b = a + b - ab$

(G, o) में तत्समक अवयव—

~~निरीक्षण द्वारा शून्य होगा।~~

सत्यापन— $a \circ 0 = \cancel{a+0} \; \cancel{0-a} - a.0$ & $0.a = 0 + a - 0.\cancel{b}a$

$a.0 = a$ $\quad = a$

$[a.0 = a = 0.a]$ $\forall a \in G$

$\therefore$ G में तत्समक अवयव 0 है।

Detailed method—

Let तत्समक अवयव e है।

$\therefore a.e = a$

$\Rightarrow a + e - a.e = a$

$\Rightarrow e(1-a) = 0$

$\Rightarrow e = 0 \quad (a \neq 1)$

$\therefore$ तत्समक अवयव $= 0$ है।

Q.85) $G = \left\{ \frac{1+2m}{1+2n} ; m, n \in Z \right\}$ गुणन संक्रिया के लिए समूह है।

$\because$ गुणन के लिए तत्समक अवयव $= 1$

$\therefore m = n = 0$ put

$\Rightarrow \frac{1+2.0}{1+2.0} = 1$

$\frac{1+2m}{1+2n}$ का प्रतिलोम $= \frac{1+2n}{1+2m}$

Q.88) Let Identity element $\Rightarrow$ e है।

Then $a * e = a$

$\cancel{a} + e + 1 = \cancel{a}$

$\boxed{e = -1}$

Q.97) Let $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}, a \neq 0, a \in R \right\}$

मैट्रिक्स गुणन के लिए एक समूह है।

निरीक्षण द्वारा – let $e = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \in G$

here $A \cdot e = A = e \cdot A \quad \forall A \in G$

$\therefore$ G में Identity element $\Rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ है।

विस्तृत विधि –

let group G में Identity element

$$E = \begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix} \text{ है।}$$

$\therefore AE = A$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e & e \\ e & e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & a \\ a & a \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow ae + ae = a \Rightarrow 2ae = a$$

$$e = \frac{1}{2}$$

$\therefore E = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ G में तत्समक अवयव है।

Q.106) Similarly.

Q.98) given let $G = \{ I_2, A, B, C \}$

A का प्रतिलोम $\Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ का प्रतिलोम

$$A^{-1} \Rightarrow \frac{1}{|A|} \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow \frac{1}{-1} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Q.99) $a * b = a + b + 1$ का तत्समक अव.

निरीक्षण द्वारा $\Rightarrow -1$

सत्यापन $a*(-1) = a+(-1)+1 = a$

& $(-1)*(a) = (-1)+a+1 = a$

$\therefore a*(-1) = a = (-1)*a \quad \forall a \in Z$

IInd method Let दी संक्रिया के लिए तत्समक अवयव e है।

$\therefore a.e = a$

$\Rightarrow a+e+1 = a$

$\Rightarrow e+1 = 0$

$\Rightarrow \boxed{e=-1}$

Group के उदाहरण ⇒

(1) यदि $Z_n = \{0, 1, 2, 3, ---(n-1)\}$ प्रथम n अऋणात्मक पूर्णांकों का समुच्चय संक्रिया $+_n$ के लिए एक group होता है।

Ex:⇒ $(Z_2, +_2)$ $\quad Z_2 = \{0,1\}$

$(Z_3, +_3)$ $\quad Z_3 = \{0,1,2\}$

$(Z_4, +_4)$ $\quad Z_4 = \{0,1,2,3\}$

(2) Set $Z_p = \{1, 2, 3, --- (p-1)\}$ प्रथम (p-1) धन पूर्णांकों का Set है।

here p = अभाज्य सं. । संक्रिया X_p के लिए एक group होता है।

$G_1 = \{1, 2, 3, 4 ; X_5\}$

$G_2 = \{1 ; 2, 3, 4, 5, 6, X_7\}$

☆ Group की कोटि ⇒

$G_0 = \{1, 0\}$, $G_2 = \{1, \omega, \omega^2 ; X\}$

$G_1 = \{1, -1, ; X\}$

$G_3 = \{1, -1, i, -i, x\}$

$G_4 = \{0, 1, 2, 3, 4 ; X_5\}$

here $O(G_0) = 1$ $\quad O(G_3) = 4$

$O(G_1) = 2$ $\quad O(G_4) = 5$

$O(G_2) = 3$

$+_5$	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

अतः here-

0 का प्रतिलोम = 0
1 — " — = 4
2 — " — = 3
3 — " — = 2
4 — " — = 1

$\times_5$	1	2	3	4
1	1	2	3	4
2	2	4	1	3
3	3	1	4	2
4	4	3	2	1

here-

1 का प्रतिलोम = 1
2 — " — = 3
3 — " — = 2
4 — " — = 4

Q.18) $\{z_6 +(\text{mod } 6)\}$ में $2+_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$ का मान = ?

$z_6 = \{0,1,2,3,4,5,~~6~~\}$

$2+_6 4^{-1} +_6 3^{-1}$

$\Rightarrow 2 +_6 (2 +_6 3)$

$\Rightarrow 2 +_6 5 = 1$

~~Q.5)~~

property-5 (page-6)

proof- $\because a \in G \Rightarrow a^{-1} \in G$

$\because a^{-1} \in G$ & $b \in G \Rightarrow a^{-1}b \in G$

Now समी. $ax=b$ में $x = a^{-1}b$ put →

$L.H.S. = ax$

$= a(a^{-1}b) = (aa^{-1})b = eb$

$= b = R.H.S.$

द्वितीय profe के लिए

Now समी. $ax=b$ के दो हल यदि संभव हैं x_1 & x_2 हैं।

$\therefore ax_1 = b$, $ax_2 = b$

$\Rightarrow \quad ax_1 = bx_2$

$\Rightarrow x_1 = x_2$

अर्थात् दोनों हल समान हैं।

$\therefore$ समी. $ax = b$ का एक हल $a^{-1}b \in G$ है।

Q.13) by option –

(2) $G = \left\{ \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix} ; a, b \in R, a \neq 0 \right\}$

let ~~संवृत नियम~~

$A_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix} \quad a_1 \neq 0, a_2 \neq 0$

Now $A_1 A_2 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 \\ -b_1 & a_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_2 & b_2 \\ -b_2 & a_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} a_1 a_2 - b_1 b_2 & a_1 b_2 + b_1 a_2 \\ -b_1 a_2 - a_1 b_2 & -b_1 b_2 + a_1 a_2 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} c & d \\ -d & c \end{bmatrix} \in G$

$I_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

& $A^{-1} = \dfrac{1}{a^2+b^2} \begin{vmatrix} a & -b \\ -(-b) & a \end{vmatrix} \in G$

अतः ये एक group है।

Similarly by option (1) & (4) = group

page-7

(1) $(G, \circ)$ के प्रत्येक अवयव के लिए $a^2 = e$ है।

$\because a^2 = e \Rightarrow a \cdot a = e \Rightarrow a^{-1} = a$

let $a \in G, b \in G \Rightarrow a^{-1} = a \Rightarrow b^{-1} = b$

$\because a \in G, b \in G \Rightarrow (a, b) \in G$

$\Rightarrow (a, b) = (ab)^{-1}$

$\Rightarrow (a, b) = b^{-1} a^{-1} \Rightarrow ab = ba$

$\therefore G$ क्रमविनिमेय है।

Ex:- ① $G = \{1, -1, i, -i\}$ एक आबेली group है। but इसका प्रत्येक अवयव a, स्वयं के प्रतिलोम के equal नहीं है।

② ऐसा आबेली group जिसके प्रत्येक अवयव, तत्समक अवयव के अतिरिक्त, की कोटि 2 है।

(i) क्लाइन 4 group है।

$G = \{e, a, b, c\}$

o	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

$e^{-1} = e$
$a^{-1} = a, \; b^{-1} = b$
$c^{-1} = c$

$a \cdot b = c$
$b \cdot c = a$
$c \cdot a = b$

(ii) $G = \{f_1, f_2, f_3, f_4 \,;\, o\}$

here $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x$, $f_3(x) = \frac{1}{x}$, $f_4(x) = \frac{-1}{x}$

Set G, संयुक्त फलन संक्रिया के लिए group है। इसके प्रत्येक अवयव स्वयं का प्रतिलोम है। इसकी संक्रिया सारणी-

o	f_1	f_2	f_3	f_4
f_1	f_1	f_2	f_3	f_4
f_2	f_2	f_1		
f_3	f_3		f_1	
f_4	f_4			f_1

अवयव की कोटि =)

① समूह $G_q = \{1, \omega, \omega^2 ; \times\}$ में ~~अव~~

$o(1) = 1$, $o(\omega) = \omega^2$
$o(\omega^2) = \omega$

$o(1) = 1$ $\qquad$ $o(i) = 4$
$o(-1) = 2$ $\qquad$ $o(-i) = 2$

$G_4 = \{0, 1, 2, 3, 4, +_5\}$ $(\because e = 0)$

$o(0) = 0$

$o(1) = 1+1+1+1+1 = (1)^5 = 0$

$\therefore o(1) = 5$

$o(2) = 2+2+2+2+2 = (2)^5 = 0$

$\therefore o(2) = 5$

$o(3) = 3+3+3+3+3 = (3)^5 = 0$

$\therefore o(3) = 5$

$o(4) = 4+4+4+4+4 = (4)^5 = 0$

$\therefore o(4) = 5$

$G_5 = \{1, 2, 3, 4; \times_5\}$ $(\because e = 1)$

$o(1) = \cancel{1\times1\times1\times1\times1 = (1)^5}\ (1)^1 = 1$

$\therefore o(1) = 1$

$o(2) = 2\times2\times2\times2 = (2)^4 = 1$ $\quad \frac{2^4}{5} = 1$

$\therefore o(2) = 4$

$o(3) = 3\times3\times3\times3 = 3^4 = 1$

$\therefore o(3) = 4$

$o(4) = 4\times4 = 4^2 \Rightarrow \frac{4^2}{5} = 1$

$\therefore o(4) = 2$

$\Rightarrow$ अवयव a & इसके (a^{-1}) inverse की कोटि same होती है।

$\Rightarrow$ let $o(a) = 1$

तब $a^1 = e \Rightarrow a = e$

अवयव की कोटि के गुणधर्म $\Rightarrow$

(iii) यदि किसी group G के एक अवयव की कोटि n है तब $a^m = e$ iff m, n का गुणज हो।

proof- Let $m = kn$ तब

$a^m = a^{kn}$

$= (a^n)^k$

$a^m = e^k = e$ —— (1)

Now let $a^m = e$

माना $m = nq + r$

here $0 \le r < n$

अब $a^m = e$

$\Rightarrow a^{nq+r} = e$

$\Rightarrow (a^n)^q \cdot a^r = e$

$\Rightarrow e^q \cdot a^r = e$

$\Rightarrow e \cdot a^r = e$

$\Rightarrow a^r = e$ (here $0 \le r < n$)

$\therefore r = 0$ $(a^n = e)$

$\therefore m = nq$ $(\because a \cdot a^{-1} = e)$

$\Rightarrow m, n$ का गुणज है।

(V) एक group G के किसी अवयव a के लिए

$o(a) = o(xax^{-1}) \ \forall x \in G$

proof $\because (xax^{-1})^2 = (xax^{-1})(xax^{-1})$

$= xa[(x^{-1}x)a]x^{-1}$

$= xa^2x^{-1}$

& $(xax^{-1})^3 = (xax^{-1})^2(xax^{-1})$

$= (xa^2x^{-1})(xax^{-1})$

$= xa^2[(x^{-1}x)a]x^{-1}$

$= xa^2(a)x^{-1}$

$= xa^3x^{-1}$

Thus $(xax^{-1})^m = xa^mx^{-1}$; $m \in Z^+$

Now let $o(a) = n$ & $o(xax^{-1}) = m$

$\therefore a^n = e$ —— (1)

$\because o(xax^{-1}) = m \Rightarrow (xax^{-1})^m = e$

$\Rightarrow xa^mx^{-1} = e$

$\Rightarrow x^{-1}(xa^mx^{-1})x = x^{-1}(e)x$

$\Rightarrow (x^{-1}x)\, a^m (x^{-1}x) = e$

$\Rightarrow a^m = e \Rightarrow m, n$ का गुणज है।