Toppersnotes
Unleash the topper in you

UP – PGT

स्नातकोत्तर शिक्षक

उत्तर प्रदेश माध्यमिक शिक्षा सेवा चयन बोर्ड

गणित

भाग – 3

SIERRA INNOVATIONS

Index

☆ COMPLEX ANALYSIS ☆

$W = f(z)$ सम्मिश्र फलन कहलाते हैं यदि z एक सम्मिश्र सं. है।

Single Valued

Eg:- $\sin z$, $\sqrt{z}$, e^z, $|z|$

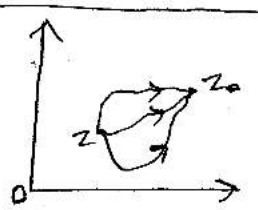
multi Valued

Eg:- $\pm\sqrt{z}$, $\tan^{-1}z$, $\sin^{-1}z$

Limit $\Rightarrow$ किसी फलन की $z=z_0$ पर limit l विद्यमान होती है यदि $\varepsilon>0$ के लिए $\delta>0$ इस तरह का विद्यमान हो कि $|z-z_0|<\delta$

$$\Rightarrow |f(z)-l|<\varepsilon$$

Complex के लिए limit $\Rightarrow$ सीमा पथ से स्वतंत्र भी हो।



here z से z_0 तक पंहुचने के अनेक तरीके हैं। its Complex limit

Eg:-> $\lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{(z^2+4)}{(z-2i)}$

$\Rightarrow \lim\limits_{z\to 2i} \dfrac{(z+2i)\cancel{(z-2i)}}{\cancel{(z-2i)}}$

$\Rightarrow 4i$

here x से x_0 तक पंहुचने का only एक ही तरीका है। ∴ its a Real limit

Eg:-> $\lim\limits_{z\to 0} \dfrac{e^{-z}}{z}$

by DLH $\Rightarrow \lim\limits_{z\to 0} \dfrac{-e^{-z}}{1}$

$= -1$

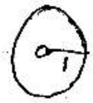
Continus f^n $\Rightarrow$ ~~किसी~~ कोई भी फलन $f(z)$, $z=z_0$ पर सतत कहलाता है यदि $\varepsilon>0$ के लिए $\delta>0$ इस तरह विद्यमान है कि $|z-z_0|<\delta$

$\Rightarrow |f(z)-f(z_0)|<\varepsilon$, δ पथ से स्वतंत्र हो।

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

Eg.- ze^2 में अनंत Value, only ∞ ~~रखने पर~~ ही आती है। अतः यह Continuous fu. है

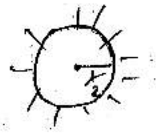
Q.27) (i) option $\Rightarrow$ $|z| \leq 1$



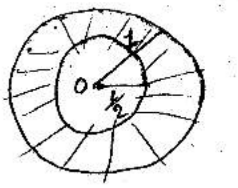
त्रिज्या = 1, (0,0) center वाला circle

0 पर discontinuous $\left(\frac{1}{z^2}\right)$ ~~हो जायेगा~~।

(iii) $|z| \geq \frac{1}{2}$ Continous है but bounded नहीं है।



(ii) $\frac{1}{2} \leq |z| \leq 1$



bounded है।
Continuous है।

Differentiability $\Rightarrow$

~~फलन~~ $f(z)$, $z = z_0$ पर diff. है।

यदि $\lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z}$ exist.

$\lim\limits_{\Delta z \to 0} \dfrac{f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)}{\Delta z}$ exist. है।

& ~~पथ~~ से ~~स्वतंत्र~~ है।

जब fun. only z में ~~दिया गया है~~ $\Rightarrow$ Then limit continuity & diff. तीनों normal तरीके से ~~निकाली जाती~~ है।

E.g.- $|z|^2 = z\bar{z}$ अवकलनीय है या नहीं
check करने की Trick ⇒

(i) $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}(z\bar{z}) = \lim_{z \to 0} z = 0$

only मूल point पर अवकलनीय है।

(ii) $\lim_{z \to 0} \frac{\partial}{\partial \bar{z}}(\bar{z}) = 1 \neq 0$

अतः यह कहीं भी अवकलनीय है।

विस्तृत विधि -

$|z|^2$ की अवकलनीयता = ?

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{(z+\Delta z)(\bar{z}+\Delta\bar{z}) - z\bar{z}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \frac{z\Delta\bar{z} + \bar{z}\Delta z + \Delta z\Delta\bar{z}}{\Delta z}$$

$$\lim_{\Delta z \to 0} \overline{\Delta z} + z\frac{\overline{\Delta z}}{\Delta z} + \bar{z}$$

Real Axis पर ⇒

$$\lim_{\Delta x \to 0} \Delta x + x + x \quad \text{—(1)}$$

img. Axis पर ⇒

$$\lim_{\Delta y \to 0} -i\Delta y + iy(-1) - iy \quad \text{—(2)}$$

(1) व (2) में दोनों में 0 put करने पर ही दोनो समान हो सकते हैं। अतः मूल बिंदु पर अवकलनीय है

$$= \lim_{z\to} z\frac{(z+\bar{z})}{2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \lim_{z\to 0} \frac{z}{2} = 0$$ अत: मूल बिंदु ~~पर~~ अवकलनीय है।

☆ <u>विश्लेषिक फलन</u> (Analytic / Holomorphic / Regular) ⇒

कोई भी फलन $f(z)$, $z = z_0$ पर Analytic कहलाता है यदि –

(i) Single Valued f^n हो।

(ii) z_0 के प्रतिवेश में diff हो।

(iii) exist.

Eg:– ① e^z ⇒ सर्वत्र Analytic (Entire)।

(i) Single Valued है।

(ii) diff है।

(बिना ∞, ∞ नही होगा)

② z^2+1+2z ⇒ entire

∵ (बहुपद always Analytic होते है)

③ $\frac{z-2}{z+1}$ (only $z=-1$ पर ∞ है)

अत: $z=-1$ पर को छोड़कर सभी points पर diff है। ($z=-1$ Singular point है)

④ $\pm\sqrt{z}$ ⇒ Not ~~diff~~ Analytic

⑤ $\frac{1}{z}$ ⇒ $z=0$ पर Singular

$z=0$ को छोड़कर सर्वत्र ~~At~~ analytic.

(6) $\log z$ $\Rightarrow$ $z=0$ पर ∞ होगा (z में $-\infty$ नहीं होता)

$z=0$ पर exist नहीं है। $\left(\frac{d}{dz}(\log z) = \frac{1}{z}\right)$

$z=0$ singular point

diff. है। (z का z के resp. diff. है)

$\Rightarrow$ $w = f(z)$ is a function.

$z = x+iy$

$w = u+iV \rightarrow V(x,y)$ का फलन

$u(x,y)$ का फलन

Eg:- $w = e^z$

$u+iv = e^{x+iy}$

$= e^x(\cos y + i\sin y)$

$u = e^x \cos y$, $v = e^x \sin y$

★ कोशी - रीमान eq^n $\Rightarrow$

Necessary condition for analytic fn

$$U_x = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$$

$$\left.\begin{aligned} U_x &= V_y \\ U_y &= -V_x \end{aligned}\right]$$

(नहीं confirm है but हां confirm नहीं है)

Eg. $w = (x^2+1) + i(y-1)$

$u = x^2+1$, $v = y-1$

$u_x = 2x$, $v_y = 1$

$\Rightarrow u_x \neq v_y$

अतः यह कोशी रीमान eq^n को संतुष्ट नहीं करता।

Q. $f(z) = \dfrac{x^3 y(y-ix)}{x^6+y^2}$ + $f(0) = 0$

ऊपर ~~नीचे~~ जैसा change x में ~~करने पर~~ y में हो रहा है। वैसा ही नीचे भी हो रहा है।

$u = \dfrac{x^3y^2}{x^6+y^2}$, $v = \dfrac{-x^4y}{x^6+y^2}$

इस तरह के फलन C-R समी. तो संतुष्ट करते है but diff. नहीं होंगे।

$\therefore$ Analytic भी नहीं होंगे।

Q.43) $w = f(z) = \dfrac{x^2y^5(x+iy)}{x^4+y^{10}}$, $z \neq 0$

$\because$ here ऊपर नीचे [(x+iy) को छोड़कर] x के ~~जैसा~~ according y में change हो रहा है।

$u = \dfrac{x^3y^5}{x^4+y^{10}}$, $v = \dfrac{x^2y^6}{x^4+y^{10}}$

$\dfrac{\partial u}{\partial x} = \dfrac{y^5[3x^2(x^4+y^{10}) - 4x^6]}{(x^4+y^{10})^2}$ —— (1)

$\dfrac{\partial v}{\partial y} = \dfrac{x^2[6y^5(x^4+y^{10}) - 10y^{15}]}{(x^4+y^{10})^2}$ —— (2)

$\because$ here (1) व (2) में x व y की घात equal

But उनका cofficient equal नहीं है।

& cofficient equal तभी होंगे जब $x = y \neq 0$

Z=0 पर- $v_x = v_y$, $u_y = -v_x$

अतः इस type के ~~लिए~~ f^n. always कोशी-रीमान C-R Condition संतुष्ट करेंगे।

~~Now differentiability check करें।~~

0 पर check ⇒ $\frac{d f(z)}{dz} = \lim_{z\to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z-0}$

$$\frac{d f(z)}{dz} = \lim_{z\to 0} \frac{\frac{x^2y^5(x+iy)}{x^4+y^{10}} - 0}{z}$$

$$\Rightarrow \lim_{z\to 0} \frac{x^2y^5}{x^4+y^{10}}$$

I ∵ firstly ~~पाथ~~ $y = x$ ($y = mx + c$) के according ~~लेने पर~~ —

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^{10}} = 0$$

II Now $x^2 = y^5$ पाथ ~~लेने पर~~ —

$$\Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{x^4}{x^4+x^4} = \frac{\cancel{x^4}}{\cancel{x^4}(1+1)}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}$$

~~अतः~~ अलग -2 ~~पाथ~~ पर Value अलग -2 है।
∴ यह diff. नहीं होगा।

⇒ यदि किसी फलन में diff. का formula लगाते वक्त ~~अंश~~ & हर में same power आ जाये या जैसा x के resp. में y का change ~~~~ अंश में है, वैसा ही हर में हो, दोनों ही स्थितियों में fn. differentiable नहीं होता क्योंकि पाथ change करने पर मान change हो जाता है।

Eg:- $f(z) = \sqrt{|xy|}$, $f(0) = 0$
$= u$ (only u है तो C-R, (0,0) पर संतुष्ट है।

$$f'(z) = \lim_{z \to 0} \frac{\sqrt{|xy|} - 0}{z - 0} = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y \to 0}} \frac{\sqrt{|xy|}}{x + iy}$$

($y = mx$ मान कर)

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{|mx^2|}}{x + imx}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\cancel{x}\sqrt{|m|}}{\cancel{x}(1 + im)}$$

यहाँ m बच रहा है। अतः यह diff. नहीं होगा।

Eg. (2) $f(z) = \dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2}$ $\quad f(0) = 0$

$$f'(z) = \frac{\dfrac{x^3 + y^3}{x^2 + y^2} - 0}{x + iy}$$

here अंश व हर में power same हो गयी है। यह diff नहीं होगा।

<u>Sufficient</u> <u>Condition</u> ⇒ किसी भी फलन $f(z)$ के लिए विश्लेषिक होने का पर्याप्त प्रतिबंध है कि C-R संतुष्ट हो & first order के derivatives विद्यमान & सतत हों।

<u>C-R समीकरणें ध्रुवीय रूप में</u> ⇒

$$r u_r = v_\theta$$

$$\& \quad u_\theta = -r v_r$$

अर्थात $\dfrac{\partial u}{\partial r} = \dfrac{1}{r} \dfrac{\partial v}{\partial \theta}$

$$\& \quad \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$$

Toppersnotes
Unleash the topper in you

Differentiation, जबकि फलन (x, y) में दिया →

यदि only differentiation निकालना हो तो $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ निकालना है।

But यदि diff. check करना है / है या नहीं तो

$\frac{\partial \omega}{\partial x} = -i\frac{\partial \omega}{\partial y}$ अर्थात $\frac{\partial \omega}{\partial x}$ व $\frac{\partial \omega}{\partial y}$ दोनों निकालने हैं।

Eg:- ① $f(z) = x^2+y^2+i(x+y) = \omega$

$$\frac{\partial f(z)}{\partial x + i\partial y} = \frac{\partial \omega}{\partial x} = -i\frac{\partial \omega}{\partial y}$$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = 2x+i \quad , \quad -i\frac{\partial \omega}{\partial y} = -i\,[2y+i]$$

$\because \boxed{\frac{\partial \omega}{\partial x} \neq -i\frac{\partial \omega}{\partial y}}$ — अतः diff नहीं है।

② $\omega = e^x \cos y + i e^x \sin y$

$$\frac{\partial \omega}{\partial x} = e^x\left[\cos y + i\sin y\right]$$

Q.76] $z = \sinh u \cos v + i \cosh u \sin v$ — ①

$$\frac{\partial z}{\partial \omega} = \frac{\partial z}{\partial u} = \cosh u \cos v + i \sinh u \sin v \quad \text{— ②}$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\partial z}{\partial \omega}\right)^2 - z^2 = ②^2 - ①^2$$

$$= \cos^2 v - \sin^2 v = 1$$

$$\frac{dz}{d\omega} = \pm\sqrt{1+z^2}$$

$$\frac{d\omega}{dz} = \frac{1}{\sqrt{1+z^2}}$$

अतः $z = \pm i$ पर विश्लेषित नहीं है।

$\because \omega = f(z)$

$\frac{\partial \omega}{\partial z} = \frac{\partial \omega}{\partial x}$

$f(z) = \frac{1}{z}$

$f(z) = 2iy$

for diff $\Rightarrow \frac{\partial w}{\partial x} = 0 \quad , -i\frac{\partial w}{\partial y} = +c$

अतः f^n diff नहीं है।

अतः विश्लेषिक नहीं है।

So यह $z=0$ पर कोशी-रीमान संतुष्ट कर सकता है।

Q.57) $f(z) = r^2 (\cos 2\theta - i \sin 2\theta)$ —①

यदि f^n polar form में चाहिए तो —

$$\frac{\partial w}{\partial z} = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{-i}{r} e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}$$

अतः by eq.ⁿ ① $\Rightarrow$

$$f'(z) = e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r} = e^{-i\theta}\,\frac{-2}{r^3}\left[e^{-i2\theta}\right]$$

$$= \frac{-2}{(re^{i\theta})^3} = -\frac{2}{z^3}$$

hint = यदि check करना हो तो $e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial r}$ व $\frac{-i}{r}e^{-i\theta}\frac{\partial w}{\partial \theta}$ दोनों निकालने होंगे।

Q.) $f(z)$ निम्न में से ~~किस~~ सभी स्थिति में अचर होगा, विश्लेषिक फलन

(1) $f'(z) = 0$

(2) $U = C$

(3) $V = C$

(4) $|f(z)| = C$

(5) $\arg f(z) = C$

(here C = Constant)

$\Rightarrow \lim_{z \to 0} \frac{\bar{z}}{z}$ ~~की limit~~ $\Rightarrow$ Not exist

फलन discontinuous $\Rightarrow$ नीचे वाली ~~जहां~~ term
जहां 0 हो & ऊपर वाली term
∞ हो वहां पर dis. c

☆ Harmonic function (प्रसंवादी फलन) $\Rightarrow$

कोई भी फलन u हार्मोनिक कहलाता है
यदि- (i) फलन संतत है।
(ii) फलन के $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$ exist & Continuous हो।
(iii) लाप्लास समी. $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ संतुष्ट हो।

Eg:17) f

Sol^n Let $u = x^3 - 3xy^2$
$\because$ यह बहुपद है। $\therefore$ Continuous है।

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 = 3(x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 6x$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -6x$$

लाप्लास समी. $\Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

$\Rightarrow 6x - 6x = 0$

अतः दिया फलन एक प्रसंवादी फलन है।

Properties ⇒ ~~यदि फलन विश्लेषिक है ⇒ तो~~ उसका u व v दोनों Harmonic होंगे।
but उलटा हमेशा सही नहीं है।

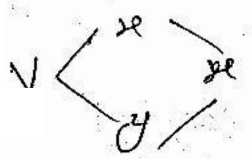
But यदि Harmonic + C-R ⇒ Then function Analytic हो जायेगा।

{Not Harmonic ⇒ Then Not analytic}

⇒ यदि function है तो u व v Harmonic Conjugate कहलाते हैं।

Q.86) $u(x, y) = e^x \cos y$ Then इसका संयुग्मी प्रसंवादी $v(x,y)$ है—

$$\because \frac{dv}{dx} = \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{dx}{dx} + \frac{\partial v}{\partial y}\frac{dy}{dx}$$



$$dv = \frac{\partial v}{\partial x}dx + \frac{\partial v}{\partial y}dy$$

$$dv = -\frac{\partial u}{\partial y}dx + \frac{\partial u}{\partial x}dy \quad \text{(by C-R)}$$

$$dv = e^x \sin y\, dx + e^x \cos y\, dy$$

$$dv = d[e^x \sin y]$$

$$\Rightarrow \boxed{v = e^x \sin y + c}$$

direct ⇒
∵ कोशी रीमान से —
$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}$
$\Rightarrow e^x \cos y = \frac{\partial v}{\partial y}$
$\Rightarrow \int dv = e^x \int \cos y\, dy$
$\Rightarrow \boxed{v = e^x \sin y + c}$

☆ **Milne Thomson method** ⇒ (u या v से direct f(z) निकालना)

यदि u दिया हो —
$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}$$

यदि v दिया हो —
$$f'(z) = \frac{\partial v}{\partial y} + i\frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\left\{\frac{\partial w}{\partial z} = \frac{dw}{dx} = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x}\right\}$$

$$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x}(z,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z,0)$$

$x = z,\ y = 0$

$$f(z) = \int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)(z,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z,0)\right] dz + c$$

~~f(z) =~~

V के लिए →

$$f'(z) = \left[\frac{\partial v}{\partial y}\right](z,0) + i\left[\frac{\partial v}{\partial x}\right](z,0)$$

$$f(z) = \int\left[\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)(z,0) + i\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)(z,0)\right] \quad \{\text{at } x = z,\ y = 0\}$$

⇒ जब ques. में $u+v$ या $u-v$ में कुछ given हो तो & $f(z)$ निकलवाये तो हम Milne Thomson method use लेते हैं। (जैसे ques.-52 है)

$(u-v)$ or $(u+v)$ given then

$$f(z) = u + iv$$

$$if(z) = iu - v$$

$$(1+i)f(z) = (u-v) + i(u+v)$$

$$\boxed{F(z) = U + iV}$$

Q. $u - v = e^{x}[\cos y - \sin y]$ $\quad \left\{f(z) = \int\left[\frac{\partial u}{\partial x}(z,0) - i\frac{\partial u}{\partial y}(z,0)\right]dz\right\}$

$$f(z) = \int[e^{z} - i(-e^{z})]\, dz + c$$

$$f(z) = (1+i)e^{z} + c$$

$$\boxed{f(z) = e^{z} + \frac{c}{1+i}}$$

P.29| $\lim_{\Delta z \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta z}$, $z=a$ पर amp(Δz) पर depend..

Then $f(z) = ?$

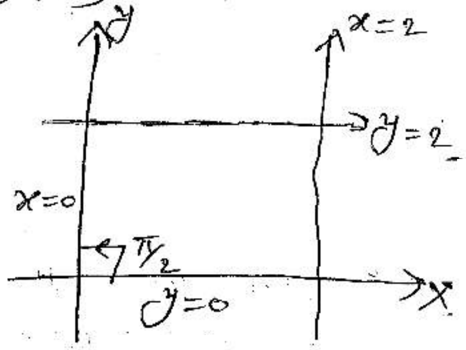
Solⁿ जब differentiability किसी पर depend हो जाये that means differentiability खत्म हो चुकी है।

अतः $f(z)$, $z=a$ पर अवकलनीय नहीं है।

☆ Transformation (प्रतिचित्रण) :⇒

$\cancel{v} = w = f(z)$

$u+iv = f(x+iy)$



z-plane

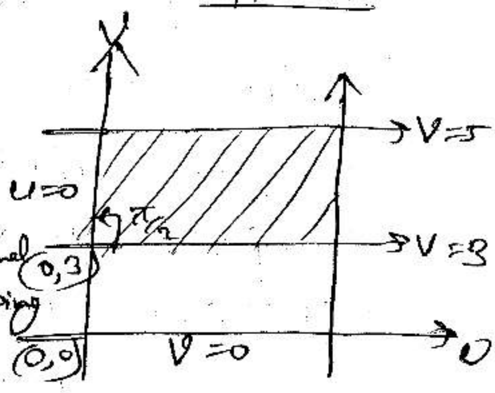
Transformation -
(स्थानान्तरण) ⇒

(1) $w = z+3i$

$u+iv = x+iy+3i$

$u=x, \quad v = y+3$

No chang in ⇒ $\left.\begin{array}{l}\text{Shape, Area,} \\ \text{position}\end{array}\right\}$ conformal mapping



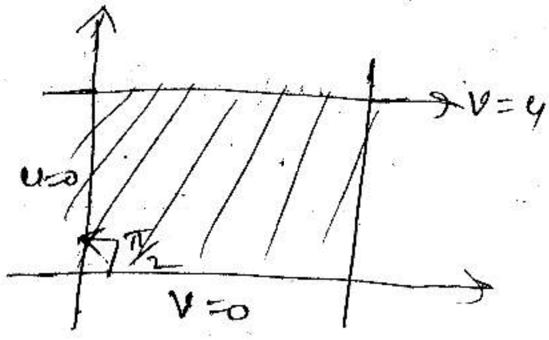
(2) $w = 2z$

$u = 2x, \quad v = 2y$

No change - Shape
- position

change - area $= a^2$ गुना

∵ here area बढ़ा है। अतः ~~आवर्धन~~

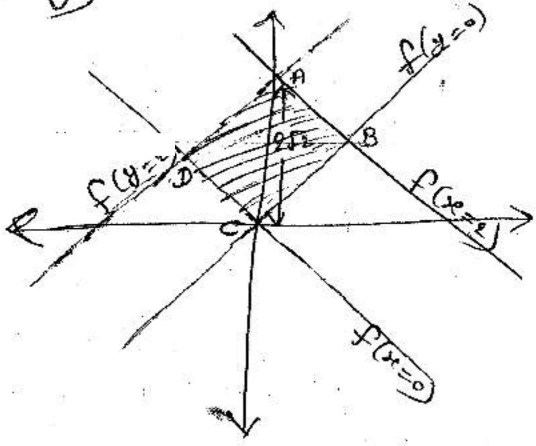


(3) $w = e^{i\pi/4} z$

$u+iv = \left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right)(x+iy)$

$u = \frac{x-y}{\sqrt{2}}, \quad v = \frac{x+y}{\sqrt{2}}$

$u+v = \sqrt{2}x, \quad v-u = \sqrt{2}y$



at $x=0$

$u+v=0 \Rightarrow v=-u$

at $y=0$

$v-u=0 \Rightarrow v=u$

at $x=2$

$v=-u+2\sqrt{2}$

at $y=2$

$v=u+2\sqrt{2}$

: इसमें square ABCD rotate हुआ है / it's called घूर्णन mapping.

[Area, Shape] ⇐ No change

जितनी e की power है उतने से rotate होगा।

(4) $w = 2e^{i\pi/4}z + 3i$

Area $= 2^2 \times a$

स्थानांतरण $= |3|$

घूर्णन $= \frac{\pi}{4}$

} No change shape

अतः z के किसी angle θ के लिए iz निकालना हो तो ⇒ $\theta + \frac{\pi}{2}$ होगा।

Similarly ⇒ $-iz$ निकालना हो तो $-z$ से $\frac{\pi}{2}$ angle पर