



IIT - JEE

JEE MAIN & ADVANCED

NATIONAL TESTING AGENCY

गणित

भाग - 1

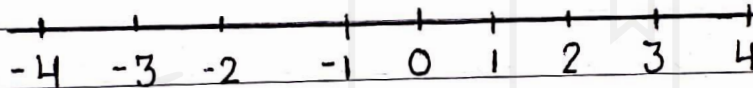


विषय सूची

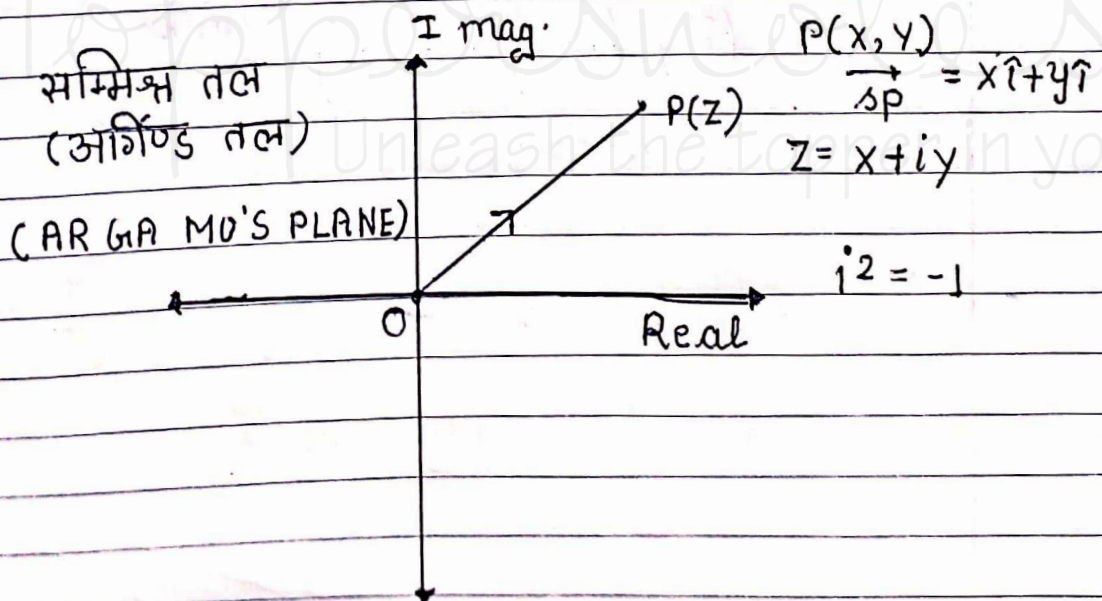
1. शमुच्यय	1
2. शंबध एवं फलन	20
3. त्रिकोणमिति फलन	35
4. शम्मिश्र शख्याए	163
5. शेशिक श्शमिकाए	228
6. क्रमचय शंचय	254
7. श्छिघात शमीकरण	342

सम्मिश्र संख्याएँ

$x+2=4 \Rightarrow x=2$	(N) → प्राकृतिक	
$x+2=2 \Rightarrow x=0$	(W) → पूर्ण	
$x+1=0 \Rightarrow x=-1$	(Z) → पूर्णांक	
$2x-1=0 \Rightarrow x=1/2$	(Q) → परिमेय	} R (वास्तविक)
$x^2+3 \Rightarrow x=\sqrt{3}$	(Q ^c) → अपरिमेय	
$x^2-2x+2 \Rightarrow 0 \Rightarrow x=1 \pm \sqrt{-1}$	(C) → सम्मिश्र	



$$z = x + iy$$



$x + iy$

 $\begin{cases} \rightarrow y=0 & \text{वास्तविक} \\ \rightarrow x=0 & \text{पूर्व काल्पनिक} \\ \rightarrow y \neq 0 & \text{काल्पनिक} \end{cases}$

$$i^{4n} = 1, \quad i^{4n+1} = i, \quad i^{4n+2} = -1, \quad i^{4n+3} = -i$$

यदि $i \in \mathbb{Z}$

i की चार क्रमागत घातों का योगफल "शून्य" ही जाता है।

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100} = 0$$

i की चार क्रमागत घातों का योगफल "शून्य" ही जाता है।

$$i + i^2 + i^3 + \dots + i^{100} = 0$$

$\sum_{r=1}^n i^r$ ($n \in \mathbb{Z}$) एक अशून्य वास्तविक संख्या

है तब n का सम्भावित मान ही सकता है।

A) 210 B) 412 C) 513 (D) 311

$$ii-1 \quad 0 \quad i \quad i-1-i = -1$$

→ $4K+3$ Ans.

$$z = x + iy$$

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

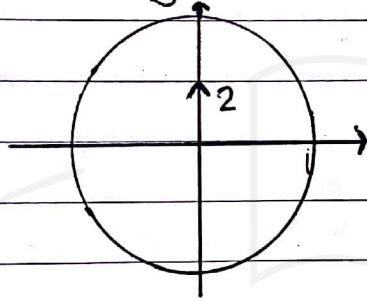
A(z₁)

→ B(z₂)

$$|z_1 - z_2| = AB =$$

$$\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

(i) $|z| = 2$ बिन्दु मथ



(ii) $|z - 1 - 2i| = 3$

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-2)^2} = 3$$

$|z|$ बिन्दु p की मूल बिन्दु से दूरी को निरूपित करता है।

$|z_1 - z_2|$ बिन्दुओं $A(z_1)$ व $B(z_2)$ के मध्य दूरी।

(iii). $|z-1| = |z-i|$

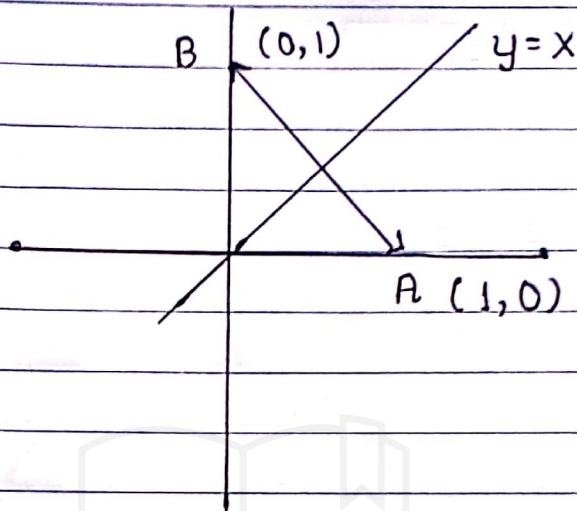
P(z)

A(1,0)

B(0,1)

$$(x-y)^2 + y^2 = x^2 + (y-1)^2$$

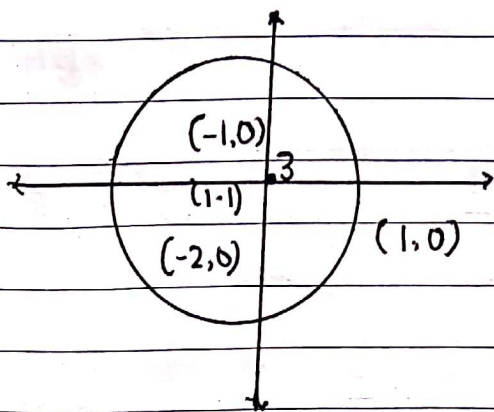
$$x=y //$$



(v). $|z+2| = 3 \rightarrow$ वृत्त केन्द्र $(-2, 0)$

$$|z+1| \text{ max \& } |z+1| \text{ min}$$

{ $(-1, 0)$ से दूरी }



$$|z+1| \text{ min} = 2$$

$$|z+1| \text{ max} = 4$$

(vi). $|z+2| \leq 3$

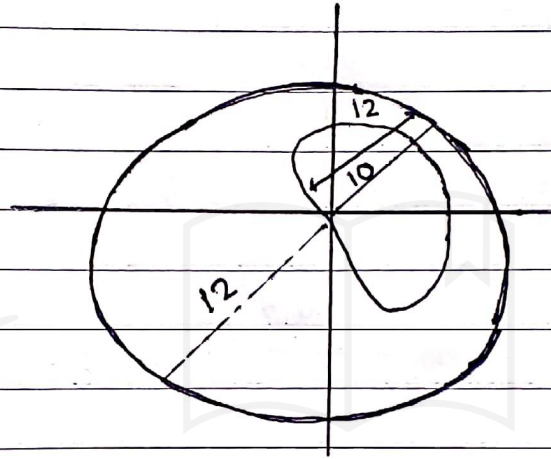
$$|z+1| \text{ min} = 0$$

$$|z+1| \text{ max} = 4$$

Example:-

यदि $|z_1| = 12$ $|z_2 - 3 - 4i| = 5$ तब $|z_1 - z_2| \in []$

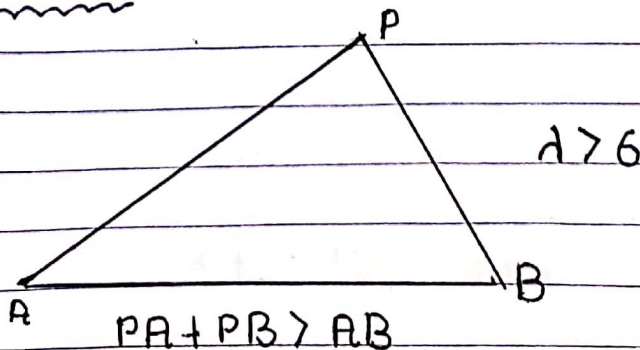
Solution →



$|z_1 - z_2| \in [2, 22]$

संकेत $|z-3| + |2+3i| = 1$ ($1 > 0$) 1 के मानों का समुच्चय ज्ञात करें जिसके लिए बिन्दु $P(z)$ का बिन्दुमध्य एक दिष्टवृत्त है।

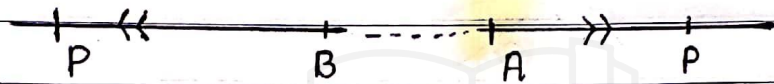
Solution →



(ii) $||z-3| - |z-3| = t \quad (t > 0)$ यदि यह अति परवलय को निरूपित करते हैं। तो t के मानों का समुच्चय

😊 Solution: →

$$\{0 < t < 6\}$$



$t = 6$ किरण $\{AA\}$ (A & B से निकलने वाली)

$t > 6$ कुछ नहीं (बिन्दु मध्य)



$A(z_1)$ तथा $B(z_2)$ सम्मिश्र तल पर स्थित दो बिन्दु हैं

तथा चर बिन्दु p जिसके संगत सम्मिश्र संख्या z है।

इस प्रकार चालायमन है कि $PA + PB = t$ यदि p का

बिन्दुमध्य दीर्घ वृत्त है तो t के मानों का समुच्चय ज्ञात

करें।

😊 Solution: →

$$PA + PB > AB$$

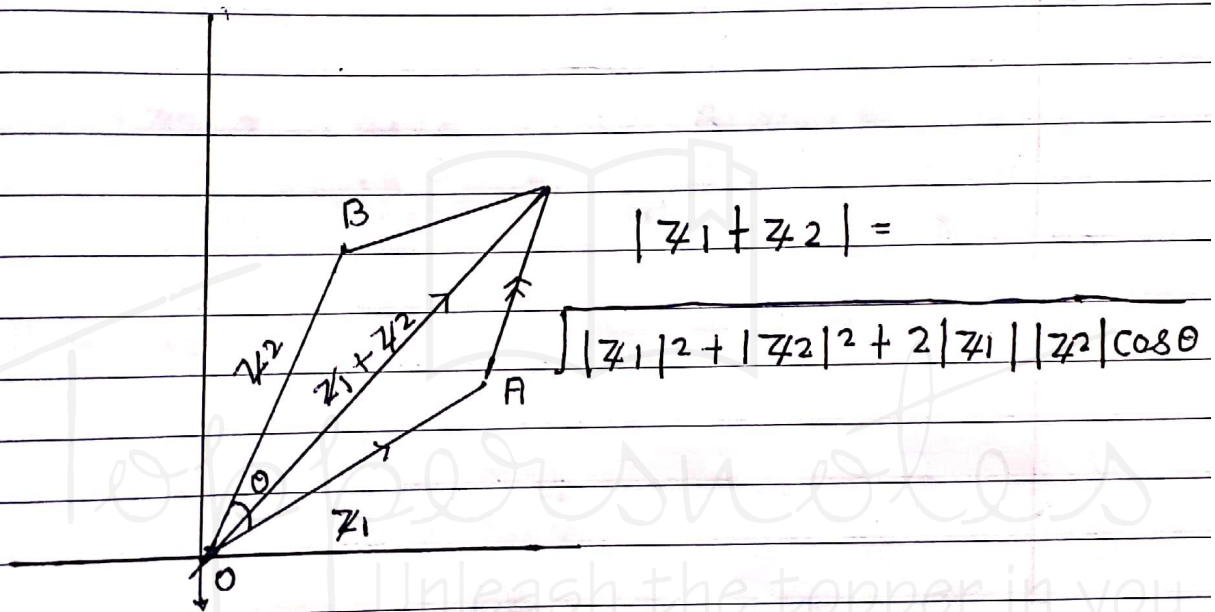
$$t > |z_1 - z_2|$$

$$t \in (|z_1 - z_2|, \infty)$$

→ त्रिभुजीय असमिकाएँ :-

Triangle Inequality

$$||z_1| - |z_2|| \leq |z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|$$

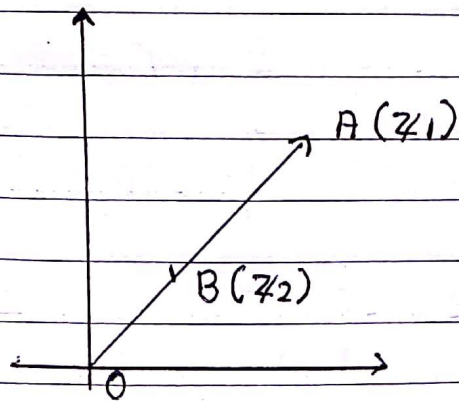


यदि $A(z_1)$ तथा $B(z_2)$ अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ हैं
तथा

#

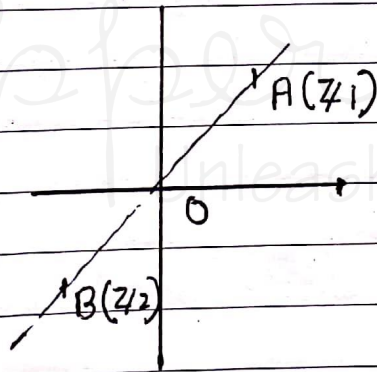
(i) $|z_1 + z_2| = |z_1| + |z_2| \Rightarrow A(z_1), B(z_2)$ तथा O

संरेखीय हैं, स्वतंत्र $O, A,$ तथा B के मध्य नहीं हैं।



$$\text{Arg}(z_1) = \text{Arg}(z_2)$$

(2) $|z_1 + z_2| = ||z_1| - |z_2|| \Rightarrow A(z_1), B(z_2),$
 O (मूलबिन्दु) संरेखीय हैं तथा O, A तथा B के
 मध्य स्थित हैं।



$$\text{arg}(z_1) - \text{arg}(z_2) = \pi$$

😊 Example ①

यदि $|z| = 4$ है तब $|z + 1/z|$ के मानों का समुच्चय
 ज्ञात करें।

☺ Solution :-

$$\left| |z| - \frac{1}{|z|} \right| \leq \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq |z| + \frac{1}{|z|}$$

$$15/4 \leq \left| z + \frac{1}{z} \right| \leq 17/4$$

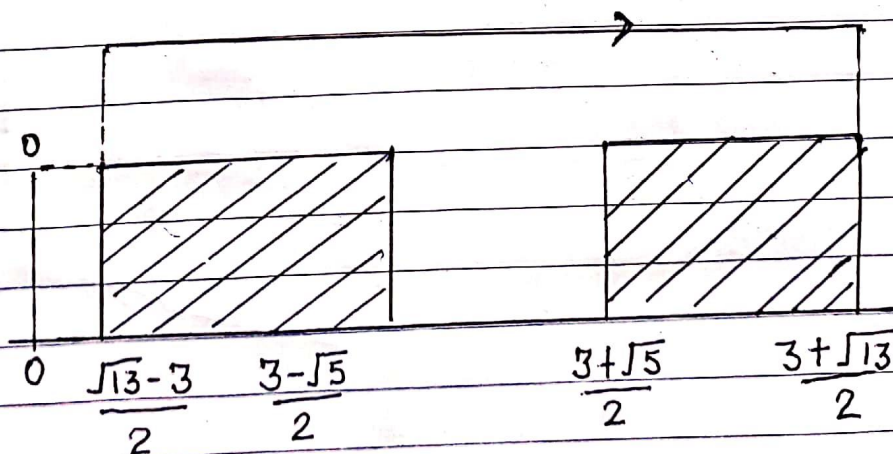
$$\left(\frac{15}{4}, \frac{17}{4} \right)$$

✱ Example :- यदि $|z + 1/z| = 9$ तो $|z|$ का अधिकतम व न्यूनतम मान ज्ञात करें।

☺ Solution :-

$$\left| |z| - \frac{1}{|z|} \right| \leq |z + 1/z| \leq |z| + \frac{1}{|z|}$$

$$R^2 - 3R + 1 \geq 0$$



$$\left| \frac{R^2 - 1}{R} \right| \leq 3$$

$$(R^2 + 3R - 1)(R^2 - 3R - 1) \leq 0$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & & \downarrow \\ \frac{-3 + \sqrt{13}}{2} & & \frac{3 + \sqrt{13}}{2} \end{array}$$

$$|z|_{\max} = \frac{3 + \sqrt{13}}{2}$$

$$|z|_{\min} = \frac{\sqrt{13} - 3}{2}$$

$$\# \quad |z + 1/z| = R$$

$$|z|_{\max} = \frac{\sqrt{R^2 + 4} + R}{2}$$

$$|z|_{\min} = \frac{\sqrt{R^2 + 4} - R}{2}$$



Example:-

$$|z + \frac{9}{z}| = 6 \quad \text{g. H.} \quad |z|_{\max} = ?$$

😊 Solution:-

$$\left| \frac{z}{3} + \frac{9}{z} \right| = 2$$

$$\frac{|z| \max}{3} = \frac{\sqrt{4+4+2}}{2}$$

$$|z| \max = 3(\sqrt{2}+1) //$$



Example:-

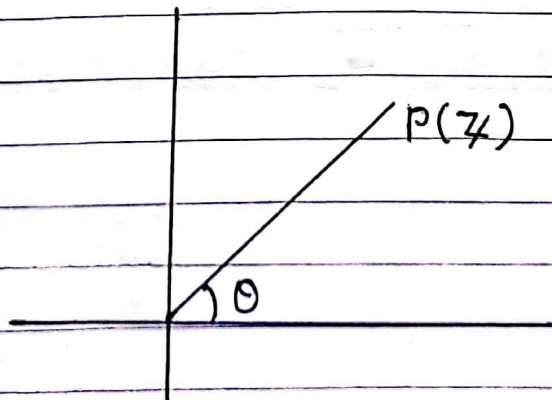
$$|z|=1 \quad |w|=1 \quad |z+iw| = |z-i\bar{w}| = 2$$

तब सम्मिश्र संख्याएँ z & w ज्ञात करें।

😊 Solution:-

$$|iw|=1$$

$$|-i\bar{w}|=1$$



$$z = iw = -i\bar{w}$$

$$w + \bar{w} = 0$$

$$2x = 0$$

$$x = 0 //$$

$$w = x + iy$$

$$\bar{w} = x - iy$$

$$w = iy$$

$$w = |y| = 1$$

$$w = i \quad \text{OR} \quad w = -i$$

$$z = -1 \quad \quad \quad z = 1$$

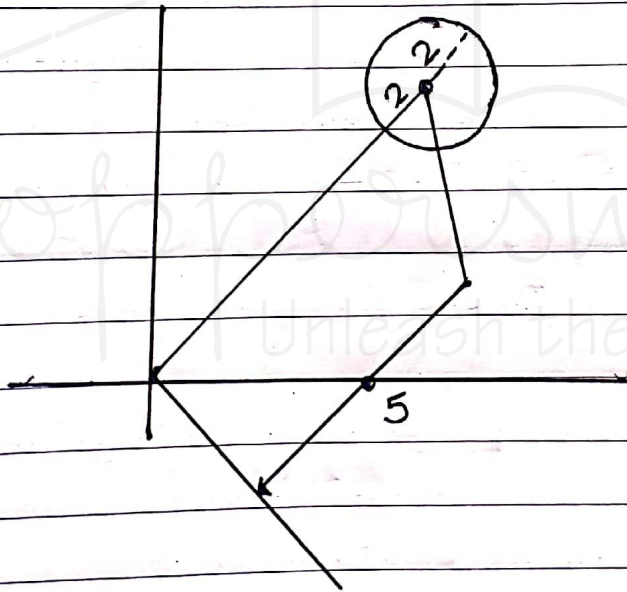


Example :-

$$|z - 3 - 4i| = 2 \quad |z| \text{ max} \quad , \quad |z| \text{ min.}$$

$$\downarrow \quad \quad \quad \downarrow$$

$$7 \quad \quad \quad 3$$



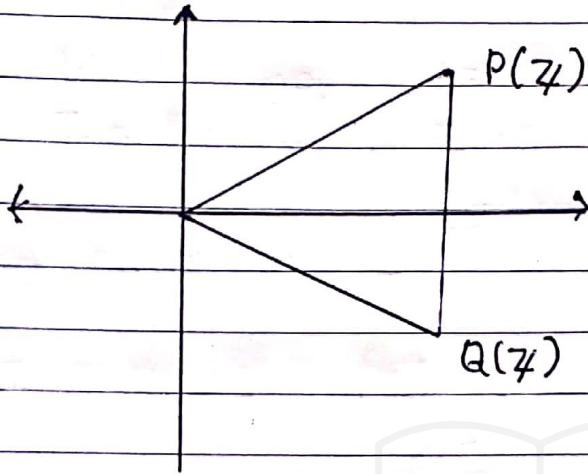
$$||z| - 5| \leq |z - 3 - 4i| \leq |z| + 5$$

$$||z| - 5| \leq 2 \leq |z| + 5$$

$$|z| - 5 \leq 2 \Rightarrow |z| = 7$$

$$5 - |z| \leq 2 \Rightarrow |z| = 3$$

संयुग्मी (CONJUGATE)



$$z = x + iy$$

$$\bar{z} = x - iy$$

$$z + \bar{z} = 2 \operatorname{Re}(z)$$

$$z - \bar{z} = 2i \operatorname{Im}(z)$$

$$z + \bar{z} = 0 \Rightarrow z \text{ विशुद्ध काल्पनिक संख्या}$$

$$z - \bar{z} = 0 \Rightarrow z \text{ वास्तविक}$$

$$\rightarrow z \bar{z} = |z|^2$$

$$\rightarrow \overline{z_1 + z_2} = \bar{z}_1 + \bar{z}_2$$

$$\rightarrow \overline{z_1 - z_2} = \bar{z}_1 - \bar{z}_2$$

$$\rightarrow \overline{z_1 z_2} = \bar{z}_1 \bar{z}_2$$

$$\rightarrow \overline{\left(\frac{z_1}{z_2} \right)} = \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2}$$

$$\rightarrow (\overline{\overline{z}}) = z$$

$$\rightarrow |z| = |\overline{z}|$$



Example: \rightarrow

$w = z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2$ प्रदर्शित किजिए की w एक वास्तविक संख्या है।



Solution: \rightarrow

$$\overline{w} = \overline{(z_1 \overline{z_2} + \overline{z_1} z_2)}$$

$$= \overline{z_1 \overline{z_2}} + \overline{\overline{z_1} z_2}$$

$$= (\overline{z_1} | \overline{\overline{z_2}}) + (\overline{\overline{z_1}} | \overline{z_2})$$

$$= (\overline{z_1}) z_2 + z_1 (\overline{\overline{z_2}})$$

$$= \overline{z_1} z_2 + z_1 \overline{z_2} = w$$

$\overline{w} = w$ वास्तविक संख्या



Example: \rightarrow

यदि z_1 तथा z_2 दो अशून्य सम्मिश्र संख्याएँ इस प्रकार की $|z_1 + z_2| = |z_1 - z_2|$ तब प्रदर्शित करे z_1/z_2 एक पूर्ण काल्पनिक संख्या है।

😊 Solution:-

$$\Rightarrow |z_1 + z_2|^2 = |z_1 - z_2|^2$$

$$\Rightarrow (z_1 + z_2)(\bar{z}_1 + \bar{z}_2) = (z_1 - z_2)(\bar{z}_1 - \bar{z}_2)$$

$$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 =$$

$$|z_1|^2 + |z_2|^2 + z_1\bar{z}_2 - z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1 + z_2\bar{z}_1$$

$$\Rightarrow z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1 z_2 = 0$$

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} = 0 //$$



सिद्ध किजिए $|z_1 + z_2|^2 + |z_1 - z_2|^2 = 2(|z_1|^2 + |z_2|^2)$

😊 Solution:-

$$\Rightarrow |z_1|^2 + |z_2|^2 + \bar{z}_1\bar{z}_2 + z_2\bar{z}_1 + |z_1|^2 + |z_2|^2 -$$

$$z_1\bar{z}_2 - z_2\bar{z}_1$$

$$= 2(|z_1|^2 + |z_2|^2) //$$